[redacted]

ГИДРОМЕХАНИКА

Н. А. СЛЕЗКИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПУЛЬПЫ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 5 VII 1952)

Механизм явления переноса частичек грунта водой в известной мере одинаков с механизмом явления переноса частичек воды или нефти газом в эрлифтах. Несущая способность воды в первом случае и газа во втором будет зависеть не только от соотношения компонент смеси в единице объема, но и от разностей скоростей частиц компонент смеси, расположенных по соседству друг с другом. Если это так, то при составлении дифференциальных уравнений движения смеси осреднение скоростей и других величин целесообразнее проводить не по общей массе смеси, а раздельно по массе каждой отдельной компоненты. Такой именно подход и был нами применен при составлении дифференциальных уравнений движения двухкомпонентной смеси в работе ([1]).

В общем случае взаимодействие компонент смеси может происходить не только по линии переноса от одной компоненты смеси к другой вектора количества движения и энергии, но и по линии преобразования массы одной в массу другой (двухфазная смесь) компоненты. Для случая механической смеси последний вид взаимодействия будет отсутствовать, вследствие чего уравнение переноса масс будет распадаться на два независимых уравнения переноса массы каждой компоненты смеси. Уравнения движения механической смеси будут тогда представляться в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_{\text{ж}}) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_{\text{ж}}\, s_i\, U_i) = 0,\\ \frac{\partial}{\partial t}[(1-m)\,\rho_{\text{c}}] + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[(1-s_i)\,\rho_{\text{c}}\, V_i] = 0;\end{gathered} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-m)\,\rho_{\text{c}}\,\mathbf{V}] - (1-m)\,\rho_{\text{c}}\,\mathbf{F} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[(1-s_i)(\mathbf{p}_{i\text{c}} - \rho_{\text{c}}\, V_i\mathbf{V})] =$$

$$= -\left\{\frac{\partial}{\partial t}(m\,\rho_{\text{ж}}\,\mathbf{U}) - m\rho_{\text{ж}}\,\mathbf{F} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[s_i\,(\mathbf{p}_{i\text{ж}} - \rho_{\text{ж}}\, U_i\,\mathbf{U})]\right\}. \tag{2}$$

В уравнениях (1) и (2) использованы следующие обозначения: $\rho_{\text{ж}}$, ρ_{c} — плотности, соответственно, жидкости и твердых частиц; $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ — векторы скоростей частиц жидкости и твердых частиц; $\mathbf{p}_{i\text{ж}}$, $\mathbf{p}_{i\text{c}}$ — векторы напряжений, отнесенные, соответственно, к площадкам частиц жидкости и твердых частиц; $\mathbf{F}$ — вектор массовой силы, отнесенный к единице массы каждой компоненты; m — безразмерный коэффициент объемной концентрации жидкости; s_i — коэффициенты просветности трех взаимно-перпендикулярных площадок, проведенных в каждой точке.

Обозначая правую часть (2) через $\mathbf{R}$, получим два векторных уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_c(1-m)\mathbf{V}\right]=\rho_c(1-m)\mathbf{F}+\mathbf{R}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(1-s_i)(\mathbf{p}_{ic}-\rho_c V_i\mathbf{V})\right],\\ \frac{\partial}{\partial t}(m\rho_ж\mathbf{U})=m\rho_ж\mathbf{F}-\mathbf{R}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[s_i(\mathbf{p}_{iж}-\rho_ж U_i\mathbf{U})\right].\end{gathered}\tag{3}$$

Введенный вектор $\mathbf{R}$ будет представлять собой вектор воздействия частиц жидкости на прилегающие твердые частицы, отнесенный к единице частиц объема смеси. Система дифференциальных уравнений (1) и (3) не является замкнутой.

Чтобы эту систему сделать замкнутой, примем следующие упрощающие предположения:

1) Коэффициенты просветности s_i заменим их средним значением, как это и принимается в теории фильтрации, причем это среднее значение примем равным коэффициенту объемной концентрации

$$s_i \cong m\,. \tag{4}$$

2) Пренебрегая касательными составляющими тензоров напряжений, будем полагать нормальные напряжения для обеих компонент смеси одинаковыми и равными давлению

$$p_{ii\,ж}=p_{ii\,c}=-p. \tag{5}$$

3) Изменениями плотности частиц каждой компоненты смеси будем пренебрегать

$$\rho_c=\text{const};\qquad \rho_ж=\text{const}. \tag{6}$$

4) Будем полагать, что основная составляющая вектора воздействия жидкости на твердые частицы смеси прямо пропорциональна разности векторов скоростей прилегающих частиц смеси. Так как происходит обтекание твердых частиц водой, то может возникать и боковая составляющая вектора воздействия жидкости на твердые частицы, которая должна определяться по теореме Жуковского. При этом за скорость обтекания может быть принята разность векторов скоростей, а за циркуляцию — разность векторов вихрей, умноженная на площадь соответственного сечения. Относя вектор воздействия жидкости на твердые частицы к единице объема смеси, получим

$$\mathbf{R}=(1-m)\left[\frac{\mu}{k}(\mathbf{U}-\mathbf{V})+\rho_ж(\mathbf{U}-\mathbf{V})\times(\operatorname{rot}\mathbf{U}-\operatorname{rot}\mathbf{V})\right], \tag{7}$$

где μ — коэффициент вязкости воды и k — коэффициент, аналогичный коэффициенту проницаемости в теории фильтрации.

5) В качестве массовой силы будем рассматривать силу тяжести

$$\mathbf{F}=-g\mathbf{i}_3\,. \tag{8}$$

Если учесть все эти дополнительные предположения, то из (1) и (2) получим следующие дифференциальные уравнения движения механической смеси:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(mU_i) = 0,$$

$$-\frac{\partial m}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}[(1-m)V_i] = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} U_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = -g\mathbf{i}_3 - \frac{1}{m\rho_ж}\operatorname{grad}(mp) - \frac{(1-m)\mu}{km\rho_ж}(\mathbf{U}-\mathbf{V}) -$$

$$-\frac{1-m}{m}(\mathbf{U}-\mathbf{V}) \times (\operatorname{rot}\mathbf{U} - \operatorname{rot}\mathbf{V}), \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} V_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i} = -g\mathbf{i}_3 - \frac{1}{(1-m)\rho_c}\operatorname{grad}[(1-m)p] + \frac{\mu}{k\rho_c}(\mathbf{U}-\mathbf{V}) +$$

$$+\frac{\rho_ж}{\rho_c}(\mathbf{U}-\mathbf{V}) \times (\operatorname{rot}\mathbf{U} - \operatorname{rot}\mathbf{V}).$$

Полученная система уравнений (9) будет замкнутой. Она состоит из 8 скалярных уравнений, содержащих 8 скалярных неизвестных функций. К числу неизвестных функций относится и коэффициент водосодержания в единице объема m.

Поступило
30 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Слезкин, ДАН, 79, № 5 (1951).