Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Г. СВЕШНИКОВ

ПРИНЦИП ПРЕДЕЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ДЛЯ МЕТАГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 VII 1952)

1. При решении внешних задач для волнового уравнения

$$\Delta u + k^2 u = -f(M) \qquad (1)$$

часто используется «принцип предельного поглощения» ([1, 2]), а именно, решение волнового уравнения (1), удовлетворяющее требованию отсутствия волн, приходящих из бесконечности, ищется как предел решения волнового уравнения с комплексным $k_1 = k + i\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ при $\varepsilon \to 0$. Принцип предельного поглощения оказывается применимым и для однозначного определения решения уравнений более общего вида, чем уравнение (1).

Настоящая работа посвящена обоснованию применения принципа предельного поглощения для однозначного определения решения метагармонического уравнения

$$L[u] = \Delta^n u + a_1 \Delta^{n-1} u + \ldots + a_{n-1} \Delta u + a_n u = -f(M), \qquad (2)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные коэффициенты, которые могут быть как действительными, так и комплексными; $f(M)$ — локальная функция.

2. При рассмотрении уравнения (2) существенным оказывается поведение корней характеристического уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = (x - \alpha_1^2)(x - \alpha_2^2)\ldots(x - \alpha_n^2). \qquad (3)$$

Корни уравнения (3) могут быть как простые, так и кратные.

Теорема 1. *Уравнение (2) имеет единственное решение, ограниченное на бесконечности, если все числа α_k имеют вид*

$$\alpha_k = \xi_k + i\eta_k \quad (\xi_k \neq 0),$$

т. е. характеристическое уравнение не имеет отрицательных действительных корней.

Доказательство теоремы основано на последовательном применении формулы Грина к функциям

$$w_1 = (\Delta - \alpha_2^2) \ldots (\Delta - \alpha_n^2)\, u;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_{n-1} = (\Delta - \alpha_n^2)\, u;$$
$$w_n = u$$

и функциям

$$v_1 = \frac{e^{-\alpha_1 r}}{r} - \frac{e^{-\alpha_1 R}}{\operatorname{sh} \alpha_1 R} \frac{\operatorname{sh} \alpha_1 r}{r};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n = \frac{e^{-\alpha_n r}}{r} - \frac{e^{-\alpha_n R}}{\operatorname{sh} \alpha_n R} \frac{\operatorname{sh} \alpha_n r}{r}.$$

При этом используется следующая лемма:

Лемма. *Если решение уравнения*

$$\Delta^n u + a_1 \Delta^{n-1} u + \ldots + a_{n-1} \Delta u + a_n u = 0 \tag{4}$$

равномерно ограничено на бесконечности, то и

$$\Delta u,\ \Delta^2 u, \ldots, \Delta^{n-1} u,\ \Delta^n u$$

равномерно ограничены на бесконечности.

При доказательстве этого положения используется теорема о среднем [3] и следующая интегральная формула:

$$u(0) = \frac{3!}{4\pi} \iiint\limits_{K_R} \frac{(R-r)}{Rr}\, u\, d\tau - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{K_R} \frac{(R-r)^3}{Rr} \Delta u\, d\tau, \tag{5}$$

где $u(0)$ — значение в центре круга K_R радиуса R.

3. Если некоторые из чисел α_k имеют вид

$$\alpha_{k_0} = i\eta_{k_0},$$

то одного требования ограниченности на бесконечности оказывается недостаточно для однозначного определения решения уравнения (2). Приходится использовать принцип предельного поглощения.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Существует единственный предел ограниченного на бесконечности решения метагармонического уравнения*

$$L[u] = \Delta^n u + a_1 \Delta^{n-1} u + \ldots + a_{n-1} \Delta u + a_n u =$$
$$= (\Delta - \alpha_1^2) \ldots (\Delta - \alpha_{k_0}^2) \ldots (\Delta - \alpha_n^2)\, u = -f(M),$$
$$(\alpha_k = \xi_k + i\eta_k;\ \xi_k \neq 0)$$

при $\xi_{k_0} \to 0$. Этот предел удовлетворяет уравнению

$$(\Delta - \alpha_1^2) \ldots (\Delta + \eta_{k_0}^2) \ldots (\Delta - \alpha_n^2)\, u = -f(M), \tag{6}$$

т. е. метагармоническому уравнению, для которого соответствующее характеристическое уравнение имеет отрицательный действительный корень.

Решение уравнения (2) имеет вид

$$u(M) = \iiint G(M\overline{M}) f(\overline{M})\, d\tau_{\overline{M}}, \tag{7}$$

где $G(M\overline{M})$ — функция источника уравнения (2), определяемая следующим образом:

1) $L[G] = 0$;

2) при совпадении аргументов:

а) $G, \Delta G, \ldots, \Delta^{n-1}G$ имеют особенность порядка не выше $\frac{1}{r}$;

б) $\frac{\partial G}{\partial r}, \quad \frac{\partial \Delta G}{\partial r} + a_1 \frac{\partial G}{\partial r}, \ldots, \frac{\partial \Delta^{n-2}G}{\partial r} + a_1 \frac{\partial \Delta^{n-3}G}{\partial r} + \ldots + a_{n-3} \frac{\partial \Delta G}{\partial r} + a_{n-2} \frac{\partial G}{\partial r}$

имеют особенность порядка не выше $\frac{1}{r}$.

в) $\frac{\partial \Delta^{n-1}G}{\partial r} + a_1 \frac{\partial \Delta^{n-2}G}{\partial r} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial G}{\partial r}$ имеет особенность порядка $\frac{1}{r^2}$.

Легко получить явное выражение для функции $G(MM)$. Оно оказывается несколько различным в случае простых и кратных корней. Для простых корней

$$G(M\overline{M}) = \frac{e^{-\alpha_1 r_{M\overline{M}}}}{r_{M\overline{M}}} + \beta_1 \frac{e^{-\alpha_2 r_{M\overline{M}}}}{r_{M\overline{M}}} + \ldots + \beta_{n-1} \frac{e^{-\alpha_n r_{M\overline{M}}}}{r_{M\overline{M}}}. \tag{8}$$

Если k_0-й корень имеет порядок m, то

$$G(M\overline{M}) = \frac{e^{-\alpha_1 r_{M\overline{M}}}}{r_{M\overline{M}}} + \ldots + e^{-\alpha_{k_0} r_{M\overline{M}}} \Big(\beta_{k_0-1} \frac{1}{r_{M\overline{M}}} + \beta_{k_0} + \beta_{k_0+1} r_{M\overline{M}} + \ldots$$
$$\ldots + \beta_{k_0+m-2} r_{M\overline{M}}^{m-2} \Big) + \ldots + \beta_{n-1} \frac{e^{-\alpha_{n-m+1} r_{M\overline{M}}}}{r_{M\overline{M}}}. \tag{9}$$

Коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ в формулах (8) и (9) определяются из условия 2б). Нетрудно показать, что это всегда можно провести однозначно.

Из формул (8) и (9) следует экспоненциальный характер поведения функции $G(M\overline{M})$ на бесконечности в том случае, если все числа α_k имеют положительную действительную часть, что и обеспечивает возможность представления решения метагармонического уравнения (2) в форме (7).

Непосредственными вычислениями легко показать, что предел выражения (7) при $\xi_{k_0} \to 0$ удовлетворяет уравнению (6). Возможность предельного перехода следует из равномерной сходимости интегралов, представляющих решение.

Теорема 2 имеет место и в том случае, если предельный переход совершается одновременно для нескольких ξ_{k_0}.

Полученные результаты обосновывают применимость принципа предельного поглощения для однозначного определения решения внешних задач для метагармонического уравнения (2).

Из представлений (8) и (9) можно получить аналитические условия на бесконечности, которые однозначно определяют решение уравнения (6). В случае простых корней эти условия совпадают с условиями, полученными И. Н. Векуа ([4]); для кратных корней они имеют более сложный вид.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. А. Н. Тихонову, под руководством которого выполнена эта работа.

Поступило
9 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, 1951. [2] А. Г. Свешников, ДАН, 73, 5 (1950). [3] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1951. [4] И. Н. Векуа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 12 (1943).