Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

О. ЖЕНХЭН

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 VII 1952)

В настоящей статье изучается вопрос о существовании и единственности решений общего интегрального уравнения

$$F\left(x,\ y(x),\ \lambda\int_a^b K(x,\ t,\ y(t))\,dt\right)=0 \tag{I}$$

и общего интегро-дифференциального уравнения

$$F\left(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x), \lambda\int_a^b K(x, t, y(t), \ldots, y^{(m)}(t))\,dt\right)=0,\quad n\geqslant m. \tag{II}$$

Допустим, что уравнения (I), (II) решаются, соответственно, относительно $y(x)$, $y^{(n)}(x)$. Тогда уравнение (I) можно записать в форме

$$y(x)=f\left(x, \lambda\int_a^b K(x, t, y(t))\,dt\right), \tag{1}$$

а уравнение (II) — в форме

$$y^{(n)}(x)=f\left(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), \lambda\int_a^b K(x, t, y(t), \ldots,\ y^{(m)}(t))\,dt\right), n\geqslant m. \tag{2}$$

Мы докажем, что при некоторых предположениях относительно функций f и K уравнения (1) и (2) имеют единственные решения.

Теорема 1. *Пусть:*

1) *функция* $f(x, z)$ *определена для* $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<z<+\infty$, *непрерывна по совокупности переменных* (x, z) *и удовлетворяет условию Липшица по* z, *т. е.*

$$|f(x, z^{**})-f(x, z^{*})|\leqslant N_1|z^{**}-z^{*}|; \tag{3}$$

2) *функция* $K(x, t, y)$ *определена для* $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$, $-\infty<y<+\infty$, *непрерывна по совокупности переменных* (x, t, y) *и удовлетворяет условию Липшица по* y, *т. е.*

$$|K(x, t, y^{**})-K(x, t, y^{*})|\leqslant N_2|y^{**}-y^{*}|. \tag{4}$$

Тогда для

$$|\lambda| < \frac{1}{(b-a)N_1N_2} \tag{5}$$

уравнение (1) *имеет единственное решение.*

Доказательство. На семействе функций $\{\varphi\}$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, определим оператор

$$A(\varphi) = f\left(x, \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))\, dt\right).$$

Тогда, очевидно, $A(\varphi) \in \{\varphi\}$, и, по условиям (3) и (4), для двух любых функций φ^{**} и φ^{*}, принадлежащих семейству $\{\varphi\}$, имеем

$$|A(\varphi^{**}) - A(\varphi^{*})| = \left| f\left(x, \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi^{**}(t))\, dt\right) - f\left(x, \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi^{*}(t))\, dt\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant N_1 \left| \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi^{**}(t))\, dt - \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi^{*}(t))\, dt \right| =$$

$$= N_1 |\lambda| \int_a^b | K(x, t, \varphi^{**}(t))\, dt - K(x, t, \varphi^{*}(t)) |\, dt \leqslant$$

$$\leqslant N_1 |\lambda| \int_a^b N_2 |\varphi^{**}(t) - \varphi^{*}(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant N_1 |\lambda| (b-a) N_2 \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi^{**}(t) - \varphi^{*}(t)|.$$

Отсюда вытекает, что при выполнении условия (5) A — оператор сжатия. Следовательно, по принципу сжатых отображений, уравнение (1) имеет единственное решение.

Аналогично устанавливается теорема существования и единственности решений для уравнения (2):

Теорема 2. *Зададим тела* y_{ia} *и* $\delta_i > 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *и пусть*:

1) *функция* $f(x, y, y^{(n-1)}, z)$ *определена для* $a \leqslant x \leqslant b$, $y_{ia} - \delta_i \leqslant y^{(i)}(x) \leqslant y_{ia} + \delta_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, *непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *и* z;

2) *функция* $K(x, t, y, \ldots, y^{(m)})$ *определена для* $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$, $y_{ia} - \delta_i \leqslant y^{(i)}(x) \leqslant y_{ia} + \delta_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *и, в случае* $m = n$, $-\infty < y^{(n)} < +\infty$ *и удовлетворяет условию Липшица по* $y, y', \ldots, y^{(m)}$.

Тогда для достаточно малых $|\lambda|$ *и достаточно малых* $h > 0$ *интегро-дифференциальное уравнение* (2) *имеет на отрезке* $[a, a+h]$ *единственное решение* $y(x)$, *удовлетворяющее начальным условиям* $y^{(i)}(a) = y_{ia}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Пхеньянский педагогический институт
Корея, Пхеньян

Поступило
3 VI 1952