Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

М. ГАГУА

ОБ ОЦЕНКАХ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА*

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 18 VI 1952)

В настоящей заметке дается обобщение некоторых результатов [2] для решений дифференциальных уравнений эллиптического типа.

§ 1. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0, \tag{E_0}$$

где Δ — оператор Лапласа; $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $c(x, y)$ — заданные целые действительные функции относительно действительных аргументов x и y; $u(x, y)$ — регулярное решение данного уравнения в некоторой конечной односвязной области T. Пусть L — граница T; не ограничивая общности, будем предполагать, что $z = 0$ принадлежит T.

Пусть $u_0, u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n, \ldots$ — система частных решений уравнения (E_0), а $E_n(u, T)$ — наилучшее приближение n-го порядка функции $u(x, y)$ в области T (см. [1]). Обозначим через L_ρ $(\rho > 1)$ внешнюю линию уровня области T, а через T_ρ — конечную область, ограниченную кривой L_ρ. В дальнейшем будем предполагать, что задача Дирихле для уравнения (E_0) в области T_ρ разрешима для любого ρ, достаточно близкого к единице, т. е. T — область нормального типа.

Рассуждениями, аналогичными приведенным в [1], используя соответствующие предложения [2, 4], легко доказываются следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть $u(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в $\overline{T}_\rho$, которая является регулярным решением уравнения (E_0) в области T_ρ. Тогда*

$$E_n(u, T) \leqslant cM(\rho - 1)^{-\lambda}\rho^{-n},$$

где $M = \sup\limits_{(x, y)\in \overline{T}_\rho} u(x, y)$, а c и λ — абсолютные постоянные.

Пусть уравнение (E_0) в области $\overline{T}$ удовлетворяет условию **

$$\operatorname{Im} G(z, 0, z, \overline{z}) = 0, \tag{1}$$

* Вопрос о возможности равномерной аппроксимации функций решениями эллиптических уравнений рассмотрен в [3, 5, 6].

** Это условие выполняется для уравнения $\Delta u + c(x, y)u = 0$ [3].

где $G(t, \tau, z, \zeta)$ — функция Римана для данного уравнения ([3]). Тогда имеем:

Лемма 2. *Пусть граница L области T кусочно-гладкая в смысле Гельдера кривая (см., например, ([3])). Пусть $w_n(x, y)$ — частное решение уравнения (E_0) вида*

$$w_n(x, y) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x, y) + b_i v_i(x, y),$$

где a_0, a_i, b_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ — действительные постоянные. Пусть, далее, $P_n(z)$ — полином n-го порядка от комплексного переменного, соответствующий (по формуле общего представления решений уравнения (E_0) ([3])) частному решению $w_n(x, y)$. Тогда

$$|P_n'(z)| \leqslant cMn, \quad |P_n(z)| < cM\lg n, \quad z \in \overline{T},$$

$$|P_n(z)| \leqslant cM\rho^n, \quad z \in \overline{T}_\rho,$$

где $M = \sup\limits_{(x,y)\in\overline{T}} w_n(x, y)$, а c — абсолютная постоянная.

Обозначим через B_t ([2]) подобласть области T, обладающую только тем свойством, что отношение расстояния любой точки B_t до t $(t \in L)$ к расстоянию той же точки до L ограничено сверху для всех точек B_t какой-либо постоянной c_0. Тогда, на основании леммы 2 и одной известной оценки ([2]), получаем:

Лемма 3. *В условиях леммы 2 имеем*

$$\max_{z\in\overline{B}_t} |P_n^{(k)}(z)| \leqslant ck! \left[d\left(t, L_{1+\frac{1}{n}}\right)\right]^{-1},$$

где c — абсолютная постоянная, а $d(t, L_\rho)$ — расстояние от линий уровня L_ρ до граничной точки t.

Предположим теперь, что T — звездообразная область с центром в начале координат. Пусть $r(\varphi)$ — уравнение в полярных координатах границы L, причем $r(\varphi) = r(\varphi + 2\pi)$ — однозначная непрерывная функция. Тогда, обозначая модуль непрерывности функций $u(x, y)$ в замкнутой области T через $\omega(\tau, u)$, получаем:

Теорема 1. *Если все производные числа функции $\lg r(\varphi)$ равномерно ограничены по модулю числом $k > 0$, а $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (E_0) в области T, непрерывное в $\overline{T}$, то*

$$E_n(u, T) \leqslant c\omega\left(\left(\frac{\lg n}{n}\right)^\mu\right),$$

где c — абсолютная постоянная, а $\mu = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{k}$.

В самом деле, обозначим через T^q область, в которую отобразится T при преобразовании $w = qz$ $(q > 1)$. Как известно ([2]), существует такая абсолютная постоянная c, что

$$T_\rho \subset T^{(1+c(\rho-1)^\mu)}.$$

Очевидно,

$$\max_{(x,y)\in\overline{T}} \left|u(x, y) - u\left(\frac{x}{q}, \frac{y}{q}\right)\right| \leqslant \omega(c_1(\rho - 1)^\mu), \tag{2}$$

где $q = 1 + c(\rho - 1)^\mu$, а c_1 — абсолютная постоянная.

Представим функцию $u\left(\frac{x}{q}, \frac{y}{q}\right)$ в области T_ρ в виде (5):

$$u\left(\frac{x}{q}, \frac{y}{q}\right) = u_\rho(x, y) - \iint_{T'_\rho} \omega(x, y, \xi, \eta)\, E\left(u\left(\frac{\xi}{q}, \frac{\eta}{q}\right)\right) d\xi\, d\eta, \qquad (3)$$

где $u_\rho(x, y)$ — регулярное решение исходного уравнения в области T_ρ; T'_ρ — произвольная область, удовлетворяющая условию $T_\rho \subset T'_\rho \subset T^q$; $\omega(x, y, \xi, \eta)$ — стандартное нормированное элементарное решение уравнения (E_0) (3), а

$$E\left(u\left(\frac{\xi}{q}, \frac{\eta}{q}\right)\right) = \Delta u + a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, u.$$

Непосредственной оценкой получаем:

$$\left|\iint_{T'_\rho} \omega(x, y, \xi, \eta)\, E\left(u\left(\frac{\xi}{q}, \frac{\eta}{q}\right)\right) d\xi\, d\eta\right| \leqslant c_2(\rho - 1)^\mu, \qquad (x, y) \in \overline{T}, \qquad (4)$$

где c_2 — абсолютная постоянная.

Теперь, используя лемму 1, (2), (3) и (4), следуя (2), легко доказывается справедливость сформулированной теоремы.

Заметим, что, если граница L — аналитическая кривая, то от требования звездообразности области T легко можно освободиться при помощи конформного отображения.

§ 2. Пусть теперь L — кусочно-гладкая кривая в смысле Гельдера, а уравнение (E_0) в области T удовлетворяет условию (1). Тогда, на основании леммы 3 и формулы общего представления решений уравнения (E_0), известным путем (2) можно доказать и обратное предложение.

Теорема 2. *Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (E_0) в области T, непрерывное в $\overline{T}$. Тогда*

$$\omega(\tau, u) \leqslant c \min_{n \geqslant 1}\left\{E_n(u, T) + \frac{\tau}{d\left(L, L_{1+\frac{1}{n}}\right)}\right\},$$

где c — абсолютная постоянная, а $d(L, L_\rho)$ — расстояние между кривыми L и L_ρ.

Обозначим, как обычно, через $[A]$ целую часть числа A.

Теорема 3. *Если для некоторой фиксированной граничной точки t*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg \dfrac{1}{E_n(u, T)}}{\lg \dfrac{1}{d\left(t, L_{1+\frac{1}{n}}\right)}} = A,$$

то значение $u(x, y)$ вдоль произвольного не касающегося границы луча, выходящего из точки t, имеет производную по лучу порядка $[A]$, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем $A - [A]$.

Сформулированная теорема устанавливает, что одна и та же скорость приближения накладывает на функцию различные ограничения в различных точках границы. Таким образом, и в нашем случае сохраняется качественно то же, что и в теории функций (2).

§ 3. Пусть T_1 и T_2 — две области, имеющие $z=0$ единственной общей граничной точкой, причем в $z=0$ границы L_1 и L_2 касаются оси OX. Пусть

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), \text{ когда } (x, y) \in \overline{T_1}; \\ u_2(x, y), \text{ когда } (x, y) \in \overline{T_2}, \end{cases}$$

где $u_1(x, y)$ — регулярное решение уравнения (E_0) в области T_1, а $u_2(x, y)$ — регулярное решение того же уравнения в T_2. Тогда при некоторых дополнительных ограничениях относительно границы области T_1+T_2 ([2]) имеем:

Теорема 4. *Если k-я $(k=0, 1, 2, \ldots)$ производная функции $u(x, y)$ по z $(z=x+iy \in L_1+L_2)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α $(0<\alpha<1)$, то*

$$E_n(u, T_1+T_2) \leqslant c\left(d\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right)^{k+\alpha},$$

где $d(\rho)$ означает расстояние линии уровня $L_{1+\rho}$ области T_1+T_2 до точки $z=0$, а c — абсолютная постоянная.

Можно доказать также и обратное предложение для данного случая, являющееся аналогом теоремы 3 ([2]).

Поступило
9 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Гагуа, ДАН, 86, № 1 (1952). [2] С. Н. Мергелян, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 37 (1951). [3] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948. [4] J. L. Walsch, W. E. Sewell, H. M. Elliott, Trans. Am. Math. Soc., 67, 381 (1949). [5] М. Е. Гагуа, Сообщ. АН Груз.ССР, 11, № 4 (1950). [6] М. Е. Гагуа, Сообщ. АН Груз.ССР, 13, № 6 (1952).