Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Я. В. БЫКОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VII 1952)

В данном сообщении рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$L(z) = \lambda \int_a^b K(x, t) M(z)\, dt + \varphi(x), \tag{1}$$

где $K(x, t)$ и $\varphi(x)$ — заданные функции; $L(z)$ — линейный однородный дифференциальный оператор с непрерывными на $[a; b]$ коэффициентами *; $M(z)$ — некоторый линейный однородный оператор ($M(z)$, в частности, может быть интегро-дифференциально-разностным оператором); z — искомая функция.

Пусть $\{y_k(x)\}$ — фундаментальная система уравнения $L(y) = 0$; $\Delta(x)$ — ее вронскиан; $d_i(x)$ — минор вронскиана $\Delta(x)$, соответствующий i-му элементу последней строки, взятый с его знаком.

Введем обозначение

$$e(x, \eta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k(x)\, d_k(\eta)}{\Delta(\eta)}.$$

Функция $e(x, \eta)$ не зависит от выбора фундаментальной системы $\{y_k(x)\}$.

Мы будем полагать, что операторы $L(z)$, $M(z)$ и функции $K(x, t)$, $\varphi(x)$ таковы, что результаты применения оператора $M(\cdot)$ к функциям

$$H(x, t) \equiv \int_{x_0}^{x} e(x, \eta) K(\eta, t)\, d\eta;$$

$$f(x) \equiv \int_{x_0}^{x} e(x, \eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta;$$

$$y_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

будут непрерывными в квадрате $a \leqslant x, t \leqslant b$ функциями; x_0 — фиксированная точка сегмента $[a, b]$.

* Старший коэффициент полагаем равным единице.

Лемма. *Всякое решение уравнения* (1) *является решением уравнения*

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)+\lambda\int_a^b H(x,\ t)\,M(y)\,dt+f(x) \tag{2}$$

при определенных значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Всякое решение уравнения (2) *при произвольных значениях постоянных* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *есть решение уравнения* (1).

Доказательство. Пусть $y_0(x)$ — решение уравнения (1) и

$$F(x)\equiv\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,M(y_0)\,dt+\varphi(x).$$

$y_0(x)$ есть решение дифференциального уравнения

$$L(y)=F(x).$$

Следовательно,

$$y_0(x)\equiv\sum_{k=1}^{n} c_k^0 y_k(x)+\int_{x_0}^{x} e(x,\ \eta)\,F(\eta)\,d\eta\equiv$$

$$\equiv\sum_{k=1}^{n} c_k^0 y_k(x)+\lambda\int_a^b H(x,\ t)\,M(y)\,dt+f(x),$$

где $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$ — определенные постоянные; x_0 — любая фиксированная точка сегмента $[a,\ b]$.

Пусть

$$z_1(x)\equiv\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)+\lambda\int_a^b H(x,\ t)\,M(z_1)\,dt+f(x). \tag{3}$$

Применяя к обеим частям тождества оператор $L(\bullet)$ и учитывая, что

$$L[H(x,\ t)]\equiv K(x,\ t);\quad L[f(x)]\equiv\varphi(x),$$

получим

$$L(z_1)\equiv\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,M(z_1)\,dt+\varphi(x).$$

Введем обозначения

$$M[f(x)]\equiv v(x);\quad M[y_i(x)]\equiv v_i(x);\quad \underset{x}{M}[H(x,\ t)]\equiv E(x,\ t).$$

Теорема 1. *Если* $z_1(x)$ — *решение уравнения* (1), *то* $M(z_1)$ — *решение уравнения*

$$\psi(x)=v(x)+\sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x)+\lambda\int_a^b E(x,\ t)\,\psi(t)\,dt \tag{4}$$

при определенной системе значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Если $\psi(x)$ — *решение уравнения* (4), *то*

$$y_0(x)\equiv f(x)+\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)+\lambda\int_a^b H(x,\ t)\,\psi(t)\,dt \tag{5}$$

есть решение уравнения (1) *при произвольных значениях постоянных* $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Доказательство. Пусть $z_1(x)$ — решение уравнения (1). На основании леммы имеем

$$z_1(x) \equiv f(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k^0 y_k(x) + \lambda \int_a^b H(x, t) M(z_1) dt. \qquad (6)$$

Применив к обеим частям тождества (6) оператор $M(\bullet)$, получим

$$M[z_1] \equiv v(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k^0 v_k(x) + \lambda \int_a^b E(x, t) M(z_1) dt.$$

Пусть $\psi(x)$ — решение уравнения (4).

Применив к обеим частям тождества (5) оператор $M(\bullet)$, мы получим

$$M[y_0] \equiv v(x) + \sum_{k=1}^{k} c_k v_k(x) + \lambda \int_a^b E(x, t) \psi(t) dt \equiv \psi(x).$$

Следовательно,

$$y_0(x) \equiv f(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + \lambda \int_a^b H(x, t) M(y_0) dt.$$

На основании леммы $y_0(x)$ — решение уравнения (1).

Следствие 1. *Если* λ *не есть собственное значение ядра* $E(x, t)$, *то общее решение интегро-дифференциального уравнения* (1) *зависит в точности от* n *произвольных постоянных* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *независимо от порядка дифференцирования оператора* $M(\bullet)$.

Доказательство. Пусть $R(x, s, \lambda)$ — резольвента ядра $E(x, t)$ и

$$w(x) \equiv v(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) v(s) ds;$$

$$w_k(x) \equiv v_k(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) v_k(s) ds.$$

Покажем, что общее решение уравнения (1) представится в виде

$$z(x) = f(x) + \lambda \int_a^b H(x, s) w(s) ds + \sum_{k=1}^{n} c_k \left[y_k(x) + \lambda \int_a^b H(x, s) w_k(s) ds \right], \qquad (7)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

Пусть $z_0(x)$ — произвольное решение уравнения (1).

Тогда

$$z_0(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k^0 y_k(x) + \lambda \int_a^b H(x, s) M(z_0) dt + f(x). \qquad (8)$$

Пусть $z_1(x)$ — решение уравнения (1), получающееся из (7) при $c_k = c_k^0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$z_1(x) \equiv f(x) + \lambda \int_a^b H(x, s) w(s) ds + \sum_{k=1}^{n} c_k^0 \left[y_k(x) + \lambda \int_a^b H(x, s) w_k(s) ds \right]; \qquad (9)$$

$$w(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k^0 w_k(x) \equiv \psi_1(x) \equiv M(z_1).$$

Вычитая (8) из (9), получим

$$z_1(x) - z_0(x) \equiv \lambda \int_a^b H(x, s)\, M(z_1 - z_0)\, ds;$$

$$M(z_1 - z_0) \equiv \lambda \int_a^b E(x, t)\, M(z_1 - z_0)\, dt;$$

$$M(z_1) \equiv M(z_0).$$

Следовательно, $z_1(x) \equiv z_0(x)$.

Теорема 2. *Если λ не является собственным значением ядра $E(x, t)$, то в точке x_0 задача Коши уравнения* (1):

$$z(x_0) = b_1; \quad z'(x_0) = b_2; \; \ldots; \quad z^{(n-1)}(x_0) = b_n$$

при любых начальных данных $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет единственное решение.

Справедливость утверждения теоремы непосредственно вытекает из (7) и из того, что

$$\underset{x}{H^{(s)}}(x_0, t) \equiv 0 \quad \text{при } s = 0, 1, \ldots, n-1$$

и что вронскиан системы $\{y_k(x)\}$ в точке x_0 не обращается в нуль.

Теорема 3. *Если $\lambda = \lambda_0$ — собственное значение ядра $E(x, t$ то задача Коши в точке x_0 либо не имеет решений, либо имеет бесконечное число решений.*

Пусть $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots, \psi_r(x)$ — линейно независимые собственные функции ядра $E(t, x)$, отвечающие собственному значению λ_0.

Если системе уравнений

$$\int_a^b \left[v(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x) \right] \psi_i(x)\, dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{10}$$

удовлетворяют произвольные значения постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то в точке x_0 задача Коши уравнения (1) имеет решение, зависящее от r параметров при любых начальных данных $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Если система уравнений (10) не имеет решений относительно $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то интегро-дифференциальное уравнение (1) не имеет решений.

Наконец, если система уравнений (10) имеет решение $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$, но не все они являются произвольными, то задача Коши уравнения (1) в точке x_0 при одних начальных данных $b_1, b_2, \ldots, b_n$ не имеет решений, при других начальных данных имеет решение, зависящее от r параметров.

Киргизский государственный
университет

Поступило
23 VI 1952