Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 1

ГЕОФИЗИКА

Л. С. ГАНДИН и Р. Э. СОЛОВЕЙЧИК

К ТЕОРИИ ИСПАРЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫХ ВОДОЕМОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 VII 1952)

Теоретические количественные расчеты испарения имеют большое значение для прикладной метеорологии и для изучения водного баланса морей и океанов. Вопросы теории испарения исследовались в значительном числе работ, однако подавляющее большинство их было посвящено рассмотрению испарения с безграничной однородной поверхности, работ же, посвященных испарению с ограниченных поверхностей, имеется весьма немного.

Испарение с ограниченной поверхности, в частности с полуплоскости, было впервые рассмотрено Джефрисом [1]. Им была предложена следующая постановка задачи. В области над испаряющей полуплоскостью учитывался вертикальный турбулентный обмен и перенос водяного пара ветром. Считались заданными концентрация водяного пара на испаряющей полуплоскости и на вертикальной полуплоскости, проходящей через ее границу. Коэффициент обмена и скорость ветра полагались не зависящими от высоты, а весь процесс — установившимся. При несколько измененных граничных условиях та же задача была рассмотрена Джиблеттом [2].

Главным недостатком обеих этих работ является допущение независимости от высоты коэффициента обмена. Действительно, в настоящее время широко известно, что в приземном слое атмосферы коэффициент обмена растет с высотой приблизительно линейно, что весьма существенно сказывается как на распределении водяного пара, так и на скорости испарения.

Зависимость коэффициента обмена от высоты была впервые введена в задачу об испарении Саттоном [3], который, однако, нашел ее решение при граничных условиях весьма частного вида и притом лишь с точностью до постоянного множителя.

Значительно больший интерес представляет работа Д. Л. Лайхтмана [4]. В этой работе ставятся граничные условия весьма общего вида, а именно, задается распределение концентрации водяного пара на испаряющей поверхности и распределение ее с высотой на вертикальной плоскости, ограничивающей рассматриваемую область. Скорость ветра также считается зависящей от высоты.

Дефектом всех этих решений является неучет турбулентного перемешивания в горизонтальном направлении, роль которого особенно велика при испарении с ограниченных водоемов.

Ниже приводится постановка и решение задачи об испарении с ограниченного водоема при учете горизонтального перемешивания.

Уравнение стационарной турбулентной диффузии в атмосфере имеет вид:

$$u \frac{\partial q}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial q}{\partial z}\right), \tag{1}$$

где q — удельная влажность; u — скорость ветра; k_x — коэффициент горизонтального обмена в направлении ветра; k_y — коэффициент горизонтального обмена в направлении, перпендикулярном ветру; k_z — коэффициент вертикального обмена; x, y — горизонтальные координаты (ось x направлена по ветру); z — вертикальная координата.

Коэффициенты обмена и скорость ветра будем считать зависящими от высоты. Следуя идее М. Е. Берлянда, примем эту зависимость в виде:

$$u = u_1 z^m;\ k_x = k_{x1} x^m;\ k_y = k_{y1} z^m;\ k_z = k_{z1} z^m,$$

где u_1, k_{x1}, k_{y1}, k_{z1} — значения соответствующих величин на единичной высоте, а m и n — некоторые правильные дроби.

Граничные условия задачи заключаются в задании концентрации водяного пара на испаряющей поверхности

$$q|_{z=0} = F(x, y) \tag{2}$$

и ограниченности ее на бесконечности

$$q|_{x=\pm\infty} < \infty,\ q|_{y=\pm\infty} < \infty,\ q|_{z=\pm\infty} < \infty. \tag{3}$$

Заметим, что было бы физически некорректно задавать влажность на любой вертикальной плоскости (например, над наветренной границей испаряющей области), поскольку горизонтальное перемешивание приводит к распространению водяного пара и в направлении, противоположном ветру.

Решение уравнения (1) при граничных условиях (2), (3) можно найти повторным применением метода, предложенного М. И. Конторовичем и Н. Н. Лебедевым ([5]). Это решение имеет вид:

$$q(x, y, z) = \frac{z^{1-n}}{2^{\frac{5+2m-3n}{2+m-n}} (2+m-n)^{\frac{2(1-n)}{2+m-n}} \Gamma\left(\frac{1-n}{2+m-n}\right) a^{\frac{8+3m-5n}{2+m-n}} b^{\frac{2(1-n)}{2+m-n}} c} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi-x}{2a^2}} F(\xi, \eta) \frac{K_{\frac{3+m-2n}{2+m-n}}\left(\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{4a^4} + \frac{(y+\eta)}{4a^2c^2} + \frac{z^{2+m-n}}{(2+m-n)^2 a^2 b^2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{4a^4} + \frac{(y+\eta)^2}{4a^2c^2} + \frac{z^{2+m-n}}{(2+m-n)^2 a^2 b^2}}\right)^{\frac{3+m-2n}{2+m-n}}} d\xi\, d\eta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi-x}{2a^2}} F(\xi-\eta) \frac{K_{\frac{3+m-2n}{2+m-n}}\left(\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{4a^4} + \frac{(y-\eta)^2}{4a^2c^2} + \frac{z^{2+m-n}}{(2+m-n)^2 a^2 b^2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{4a^4} + \frac{(y-\eta)^2}{4a^2c^2} + \frac{z^{2+m-n}}{(2+m-n)^2 a^2 b^2}}\right)^{\frac{3+m-2n}{2+m-n}}} d\xi\, d\eta \right\}, \tag{4}$$

где $a^2 = k_{x1}/u_1$, $c^2 = k_{y1}/u_1$; $b^2 = k_{z1}/u_1$; K — бесселева функция мнимого аргумента 2-го рода.

При этом на функцию $F(x, y)$ должны быть наложены ограничения, обеспечивающие сходимость написанных интегралов. В остальном функция $F(x, y)$ совершенно произвольна. Наиболее простым из возможных предположений относительно $F(x, y)$ является ее постоянство на испаряющей поверхности и равенство нулю вне этой поверхности.

Заметим в заключение, что аналогичным путем может быть решена также задача о распространении тепла с учетом излучения в соответствующей постановке.

Поступило
26 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Jeffreys, Phil. Mag., (6), **35**, No. 207 (1918). [2] M. A. Giblett, Proc. Roy. Soc. (A), **99**, No. 701 (1921). [3] O. G. Sutton, ibid., **146**, No. 858 (1934). [4] Д. Л. Лайхтман, Метеорология и гидрология, № 1 (1947). [5] М. И. Конторович, Н. Н. Лебедев, ЖЭТФ, **8**, № 10—11 (1938).