Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 1

ФИЗИКА

Ю. А. ЯППА

О СВЯЗИ МЕЖДУ ТЕОРИЕЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ТЕОРИЕЙ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

(Представлено академиком В. А. Фоком 7 VII 1952)

Как известно, метод перенормировки становится однозначным способом устранения бесконечных выражений, появляющихся при решении проблем квантовой электродинамики с помощью теории возмущений, лишь после дополнения его «регуляризационными» правилами Паули и Вилларса [1].

Цель настоящей заметки — выяснить некоторые физические аспекты этих правил, не рассматривавшиеся, насколько нам известно, в литературе, именно связь этих правил с теорией элементарных частиц, обладающих произвольным спином.

Формальное содержание правил регуляризации заключается в том, что инвариантные дельта-функции для электронно-позитронного поля Δ_0 и $\Delta^{(1)}$, применявшиеся в квантовой электродинамике, заменяются на регуляризованные функции Δ_{0R} и $\Delta_R^{(1)}$ следующим образом:

$$\Delta_{0R} = \sum_i c_i \Delta_0 (M_i), \quad \Delta_R^{(1)} = \sum_i \Delta^{(1)} (M_i), \tag{1}$$

причем коэффициенты c_i должны удовлетворять условиям:

$$\sum_i c_i = 0, \qquad \sum_i c_i M_i^2 = 0; \tag{2}$$

здесь M_i — ряд дополнительных масс, вводимых «формально» и устремляемых в конце вычисления к бесконечности.

Как указали Д. Иваненко и В. Григорьев [2], а также Тирринг [3], правила регуляризации получаются из теории с высшими производными. Именно, если предположить, что волновая функция поля $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению с высшими производными:

$$R_2 \psi = \prod_{i=1}^{k} (\Box - \varkappa_i^2) \psi(x) = 0, \tag{3}$$

то при квантовании этого поля соответствующая инвариантная дельта-функция имеет вид, требуемый соотношениями (1), причем коэффициенты автоматически удовлетворяют соотношениям (2). Это имеет место при любом выборе масс $\varkappa_i$, входящих в уравнение (3).

С другой стороны, существует связь между теорией, применяющей уравнения с высшими производными, и теорией частиц, обладающих произвольным спином. Как известно, при общем изучении таких частиц уравнения поля обычно формулируются в матричном виде:

$$R_1 \psi = \left(L^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \varkappa \right) \psi = 0, \tag{4}$$

причем то обстоятельство, что частицы, описываемые уравнением такого вида, должны обладать тем или иным спином, выводится из трансформационных свойств волновой функции при преобразованиях Лоренца. Заметим, что вопрос о квантовании соответствующих полей, так же как и вопрос о том, каким образом можно ввести взаимодействие с другими полями, если имеют место общие уравнения вида (4), еще не изучены, и поэтому нельзя с уверенностью сказать, что во всех случаях, когда формулируются уравнения (4), имеет место описание спина.

В работе Бабы ([4]) изучен частный вид уравнений типа (4) при предположении, что матрицы L^k удовлетворяют соотношению

$$[L^m, L^n] = I^{mn}, \tag{5}$$

где I^{mn} — инфинитезимальные преобразования представления группы Лоренца.

При выполнении соотношения (5) можно установить упоминавшуюся связь между теорией частиц с произвольным спином и теориями с высшими производными. В случае выполнения соотношения (5) волновая функция, удовлетворяющая уравнению типа (4), должна удовлетворять и уравнению типа (3) ([4]). Действительно, применяя соотношение (5) и используя общие свойства матриц L^k, легко можно проверить, что оператор

$$\{P^2 - p^2\lambda^2\}\{P^2 - p^2(\lambda - 1)^2\} \tag{6}$$

является аннулирующим оператором. Здесь $P \equiv p_k L^k$, $p^2 \equiv p_k p^k$, $p_k \equiv \partial / \partial x^k$, а λ — данное значение спина. Если же ψ является решением уравнения (4), то для такой функции ψ оператор (6) является аннулятором и в том случае, если заменить при помощи повторного применения уравнения (4) все P на $\varkappa$, т. е. для такой функции получается уравнение типа (3). Здесь $\varkappa$ обозначает некоторую «основную» величину массы покоя. Таким образом, любая функция ψ, являющаяся решением системы уравнений (4), удовлетворяет и уравнению с высшими производными вида (3).

Инвариантная дельта-функция $C(x)$ для поля, описываемого уравнением (4), также должна удовлетворять и уравнению (4) и уравнению (3) (как это имеет место в простейших случаях частиц со спином 0, $^1/_2$ или 1). Легко видеть, что если $\Delta_R(x)$ — дельта-функция, связанная с функцией Грина для уравнения (3), то для функции $C(x)$, имеющей вид

$$C(x) = F(L^k p_k, \varkappa)\, \Delta_R(x), \tag{7}$$

где F — оператор, удовлетворяющий условиям

$$R_1 F = R_2, \qquad [R_2, F] = 0, \tag{8}$$

выполняются требования, обычно накладываемые на дельта-функции уравнений вида (4). Задача нахождения оператора F в каждом данном случае может быть решена путем вычисления «присоединенной матрицы» для R_1. Общая формула для вычисления такой матрицы известна (R_2 является «характеристическим полиномом», а R_1 — «характеристической матрицей» для оператора $L^k p_k$); в нашем случае она имеет вид:

$$F(L^k p_k, \varkappa) = (-L^k p_k)^{n-1} + (\varkappa + r_1)(-L^k p_k)^{n-2} + \cdots + (\varkappa^{n-1} + \\ + r_1 \varkappa^{n-2} + \cdots + r_{n-1}), \tag{9}$$

если операторный «характеристический полином» (3) привести к виду:

$$R_2(\varkappa) = \varkappa^n + r_1 \varkappa^{n-1} + \cdots + r_n. \tag{10}$$

Коэффициенты $r_1, r_2, \ldots, r_n$ могут содержать операторы p_k и матрицы L^k. Для случаев уравнений Дирака и Дэффина-Кеммера из уравнения (9) без труда получаются известные формулы для F в этих случаях, приведенные, например, в ([6]) (стр. 53 и 62), причем, так как уравнение (3) сводится в этих случаях к уравнению второго порядка с одной массой, в формулу (7) вместо функции Δ_R входит нерегуляризованная функция Δ. Разложение функции $C(x)$ отличается от разложения функции Δ_R рядом членов, исчезающих при $x^s x_s = 0$, и, таким образом, функция $C(x)$ сама является регуляризованной в случае наличия нескольких масс.

Формулы (7) и (9) дают решение задачи определения релятивистски-инвариантной функции $C(x)$, которая должна определять перестановочные соотношения для компонент волновой функции $\psi(x)$ при вторичном квантовании полей частиц, описываемых уравнением (4) при условии (5). Исследование проблемы вторичного квантования таких полей не входит в цели настоящей заметки.

Формула (7) указывает, что при замене уравнения Дирака таким уравнением вида (4), для матриц которого выполняется условие (5), везде, где ранее в вычисления входили функции Δ (соответствующие уравнению второго порядка), они должны быть заменены на функции Δ_R, в ряде случаев умноженные на некоторые операторы (наличие их не нарушает регуляризации).

Таким образом, применение правил Паули—Вилларса совместимо не только с предположением о том, что для электронной волновой функции имеют место уравнения с высшими производными (3) вместо уравнения второго порядка Клейна — Фока, но и с предположением о том, что для более строгого описания процесса взаимодействия электрона с электромагнитным полем должны применяться уравнения типа (4), либо описывающие набор полей частиц, спины которых могут быть и различными и одинаковыми (тогда в уравнение (3) будет входить произвольный набор масс $\varkappa_i$), либо же описывающие частицу, обладающую различными состояниями спина (тогда в соответствующее уравнение (3) будет входить определенный набор масс $\varkappa_i$ — спектр масс, соответствующий данному спектру спинов частиц); для простоты изложения оператор (6) приведен нами в виде, соответствующем второму из этих случаев.

Эти две возможности выполняются, соответственно, тогда, когда уравнение (4) является «распадающимся», и тогда, когда оно «не распадается» ([4], [5]). Обычно ([9]) рассматривалась возможность, соответствующая «распадающемуся» уравнению (4). Благодаря появлению оператора F в выражениях для физических величин эти выражения могут быть вообще различными при различных предположениях относительно физического смысла регуляризации, но все они будут при выполнении приведенных выше условий регуляризованными.

Нам кажется интересным отметить то обстоятельство, что правила регуляризации получаются и в том случае, когда уравнение (4) считается соответствующим элементарной частице, обладающей спектром спинов. То, что не исключен и такой случай истолкования правил регуляризации, может иметь двоякий смысл.

1. Либо следует интерпретировать правила регуляризации прямо как введение соответствующих «компенсирующих» полей. Из вышеизложенного следует, что этими полями могут оказаться электронные поля в состояниях с более высоким спином. Тогда успех правил Паули—Вилларса дает косвенное указание на возможность существования у электрона некоторых высших состояний спина (и соответствующих им значений массы, убывающих с переходом к состояниям более высокого спина), причем при рассмотрении взаимодействия с электромагнитным полем учитываются и эти более высокие состояния спина электрона. Если считать, что экспериментальные данные достаточно убедительно показывают, что спин электрона равен $^1/_2$, то эта возможность отпадает.

2. Тогда можно воспользоваться (как в работе ([1])) идеей о том, что наличие дополнительных полей представляет собой математическое представление (имеющее какой-то неизвестный еще физический смысл), применение которого оправдывается достигаемыми результатами. Факт связи между правилами регуляризации и теорией частиц с произвольным спином должен быть тогда истолкован, как указание на то, что последняя (развитая с полной общностью в работе ([5])) не во всех своих частных случаях соответствует описанию именно спина (ср. сказанное непосредственно после уравнения (4)), а содержит, кроме того, ряд формальных, но физически важных возможностей, которые могут быть использованы при решении физических задач для частиц с обычным спином. Например, любое уравнение типа (4), соответствующее правилам регуляризации, может быть истолковано как уравнение для описания частицы со спином $^1/_2$, выбранное таким образом, чтобы автоматически получались и упомянутые правила, необходимые для решения физических задач.

Такая интерпретация позволяет, в частности, понять тот факт ([7]), что в некоторых вариантах теории часть расходимостей устраняется, несмотря на то, что «дополнительные поля» обладают энергией и зарядом, равным нулю.

Следует отметить также, что, так как «нелокализуемые поля» Юкавы являются суперпозицией полей с различным спином ([8]), правила регуляризации, на основании вышеизложенного, могут быть получены и из теории «нелокализуемых полей».

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
19 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Паули, Ф. Вилларс, Сборн. Сдвиг уровней атомных электронов, 1950. [2] Д. Иваненко, В. Григорьев, ЖЭТФ, **21**, 563 (1951). [3] E. Thirring, Phys. Rev., **77**, 570 (1950); **79**, 703 (1950). [4] H. J. Bhabha, Rev. Mod. Phys., **17**, 200 (1945). [5] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, ЖЭТФ, **18**, 703 (1948). [6] В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, 1947. [7] Ф. И. Федоров, ДАН, **79**, 787 (1951). [8] M. Fierz, Helv. Phys. Acta, **23**, 414 (1950). [9] A. Pais, On the Theory of Elementary Particles, 1947.