Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

Я. И. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ

К ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ О СТОЯЧИХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 18 VI 1952)

Рассмотрим трехмерное движение тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной только сверху свободной поверхностью, на которой давление постоянно и равно нулю. Мы ищем точное решение задачи о трехмерных стоячих волнах конечной амплитуды на поверхности данной жидкости. В известной нам литературе имеется только приближенное решение такой задачи, данное Пенней и Прайсом [1]. Мы попытались точно решить поставленную задачу и здесь кратко излагаем полученные нами результаты. При этом мы обобщаем метод решения, примененный нами в работе [2] для случая плоской простой стоячей волны (см. также [3]).

Плоскость xOy прямоугольной пространственной системы координат мы совмещаем с горизонтальным уровнем покоящейся жидкости, ось Oz направим вертикально вверх. Мы рассматриваем только частный случай таких трехмерных стоячих волн, которые можно определить как произвольное периодическое по времени, по x и по y движение рассматриваемой жидкости.

Свободная поверхность, отвечающая простейшей синусоидальной волне линейной теории, с малой амплитудой εA (где ε — малый безразмерный параметр) дается, как известно, уравнением

$$z = \varepsilon A \sin K_1 x \sin K_2 y \sin \sigma t. \tag{1}$$

При этом вдоль оси Ox длина волны $L_1 = 2\pi / K_1$, вдоль оси Oy длина волны $L_2 = 2\pi / K_2$; период колебаний $T = 2\pi / \sigma$.

Если положить

$$K_1^2 + K_2^2 = K_3^2, \tag{2}$$

то из граничного условия на свободной поверхности вытекает известное соотношение

$$K_3 = \sigma^2 / g. \tag{3}$$

Мы ищем точное решение задачи, при котором линейную волну (1) можно взять как первое приближение для построения волны малой, но конечной амплитуды и периодической по отношению к x, y и t.

Решаем задачу в переменных Лагранжа a, b и c. Ищем $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ — декартовы координаты частиц жидкости, а также $Q(a, b, c, t)$ — функцию, связанную с давлением $p(a, b, c, t)$

формулой $Q = -p/\rho - gz$, где ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, t — время. Требуем, чтобы при $t = 0$, т. е. в начальный момент, а следовательно и во все время движения, свободной поверхности отвечало значение $c = 0$. Полагаем, что a, b и c являются криволинейными координатами частиц жидкости в начальный момент. При этом пусть поверхности $a = \mathrm{const}$ будут плоскостями, параллельными плоскости yOz; $b = \mathrm{const}$ — плоскостями, параллельными плоскости xOz; $c = \mathrm{const}$ — поверхностями, образующими третье семейство координатных поверхностей, имеющими неизвестную заранее форму в начальный момент.

Полагая, что при $t = 0$ уравнение третьего семейства координатных поверхностей имеет вид

$$z = c + f(x, y, c), \tag{4}$$

где $f(x, y, c)$, по условию, неизвестная искомая функция, мы, очевидно, должны потребовать выполнения следующих соотношений при $t = 0$:

$$\begin{gathered} x_0 = x(a, b, c, 0) = a, \quad y_0 = y(a, b, c, 0) = b, \\ z_0 = z(a, b, c, 0) = c + f(a, b, c). \end{gathered} \tag{5}$$

Граничное условие $p = 0$ при $c = 0$ для $Q(a, b, c, t)$ примет вид

$$Q(a, b, 0, t) = -gz(a, b, 0, t). \tag{6}$$

Напишем решение линейной задачи с малой амплитудой в переменных Лагранжа:

$$\begin{gathered} x = a + \xi^* = a + \varepsilon \frac{m}{s} A \cos K_{10}a \sin K_{20}b \exp(K_{30}c) \sin \sigma t, \\ y = b + \eta^* = b + \varepsilon \frac{n}{s} A \sin K_{10}a \cos K_{20}b \exp(K_{30}c) \sin \sigma t, \\ z = c + \zeta^* = c + \varepsilon A \sin K_{10}a \sin K_{20}b \exp(K_{30}c) \sin \sigma t, \\ Q^* = -\varepsilon Ag \sin K_{10}a \sin K_{20}b \exp(K_{30}c) \sin \sigma t, \\ K_{10} = \frac{\sigma^2}{g}\frac{m}{s}, \quad K_{20} = \frac{\sigma^2}{g}\frac{n}{s}, \quad K_{30} = \frac{\sigma^2}{g} = K_0 s, \quad K = K_0 = \frac{\sigma^2}{gs}; \end{gathered} \tag{7}$$

при этом m, n и s — любые положительные числа, удовлетворяющие соотношению

$$m^2 + n^2 = s^2; \tag{8}$$

здесь величинам K и K_l мы приписали индекс нуль, чтобы отличить их от их значений при точном решении задачи.

Ищем точное решение задачи, мало отличающееся от решения для линейной волны (7). Поэтому, положив

$$x = a + \xi, \quad y = b + \eta, \quad z = c + \zeta + f, \tag{9}$$

мы будем искать $\xi(a, b, c, t, \varepsilon)$, $\eta(a, b, c, t, \varepsilon)$, $\zeta(a, b, c, t, \varepsilon)$, $Q(a, b, c, t, \varepsilon)$ зависящими от малого параметра ε и такими, чтобы их линейные относительно ε слагаемые совпадали с ξ^*, η^*, ζ^* и Q^* из (7) при $K = K_0$ и $K_l = K_{l0}$; A, m и n также фиксированы; функция $f(a, b, c, \varepsilon)$ не должна иметь слагаемого, линейного относительно ε.

Согласно (7), у линейной волны $K = K_0 = \sigma^2/gs$. При решении точной задачи рассматриваем $K = K(\sigma, \varepsilon)$ как неизвестную функцию, определяемую в ходе решения задачи и удовлетворяющую условию

$$\lim_{\varepsilon=0} (K - K_0) = 0. \tag{10}$$

Мы показываем, что в результате приходим к следующей **математической задаче**:

Определить функции Q, ξ, η, ζ, f и константу $K = K(\sigma, \varepsilon)$ так, чтобы:

1) удовлетворялись дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\frac{\partial (\zeta + f)}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial a},$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\frac{\partial (\zeta + f)}{\partial b} = \frac{\partial Q}{\partial b},$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial^2 t}\frac{\partial (\zeta + f)}{\partial c} = \frac{\partial Q}{\partial c}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c} =$$

$$= -\frac{D(\eta, \zeta + f)}{D(b, c)} - \frac{D(\xi, \zeta + f)}{D(a, c)} - \frac{D(\xi, \eta)}{D(a, b)} - \frac{D(\xi, \eta, \zeta + f)}{D(a, b, c)},$$

получающиеся из уравнений гидродинамики (в правой части последнего уравнения стоит сумма функциональных определителей); выполнялись начальные и граничные условия

$$\xi(a, b, c, 0, \varepsilon) = \eta(a, b, c, 0, \varepsilon) = \zeta(a, b, c, 0, \varepsilon) = 0, \tag{12}$$

$$Q(a, b, 0, t, \varepsilon) = -g[\zeta(a, b, 0, t, \varepsilon) + f(a, b, 0, \varepsilon)], \tag{13}$$

вытекающие из (5), (6) и (9);

2) искомые функции были бы периодическими по a с периодом $L_1 = 2\pi / K_1$; периодическими по b с периодом $L_2 = 2\pi / K_2$; периодическими по t с периодом $T = 2\pi / \sigma$ при σ заданной произвольной величине; искомые функции были бы ограниченными при $b \to -\infty$;

3) для K выполнялось бы условие (10), причем $K_1 = Km$, $K_1 = Kn$, m и n — любые фиксированные положительные числа, удовлетворяющие соотношению (8); кроме того, $\lim K_i = K_{i0}$ из (7); функция $f(a, b, c, \varepsilon)$ не имела бы слагаемых, линейных относительно ε; остальные функции имели относительно ε линейные слагаемые, совпадающие с ξ^*, η^*, ζ^* и Q^* из (7) при фиксированных A, m, n и при $K = K_0$, $K_1 = K_{10}$, $K_2 = K_{20}$, $K_3 = K_{30}$, кроме того, $\xi - \xi^*$, $\eta - \eta^*$, $\zeta - \zeta^*$, $Q - Q^*$, f равнялись бы нулю при $\varepsilon = 0$;

4) функция Q удовлетворяла бы условиям нормировки, т. е. разность $Q - Q^*$ не содержала бы выражений вида $M \sin K_{10} a \sin K_{20} b \exp(K_{30} c) \sin \sigma t$; функция $f(a, b, c, \varepsilon)$ была бы гармонической от переменных a, b и c;

5) движение было бы с потенциалом скоростей.

Мы доказываем, что *при достаточно малых значениях* $|\varepsilon|$ *эта задача имеет единственное решение. При этом все искомые функции и константа оказываются голоморфными функциями* ε.

При решении задачи мы ищем функции и константу в виде степенных рядов по ε; доказываем сходимость этих рядов; затем показываем, что если решение существует, то оно при достаточно малых $|\varepsilon|$ единственно.

При построении решения, чтобы избежать вековых слагаемых, мы делаем замену переменных, положив $a_1 = Ka$, $b_1 = Kb$, $c_1 = Kc$. Приводим результаты вычисления первых приближений.

Имеем

$$2\pi\sqrt{\frac{1}{L_1^2}+\frac{1}{L_2^2}}=K_s=$$

$$=\frac{\sigma^2}{g}+\frac{\varepsilon^2A^2\sigma^6}{16g^3s^4}\left[\frac{1}{4}(15s^4-3m^4-3n^4-10m^2n^2)-\frac{4mn^4}{2s-m}-\frac{4nm^4}{2s-n}\right]. \quad (14)$$

Положив в x, y и z $c=0$ и исключив a и b, мы получаем приближенное уравнение волновой поверхности:

$$z(x, y, t, \varepsilon)=\varepsilon A\sin mx\cdot\sin ny\cdot\sin\sigma t+$$

$$+\frac{\varepsilon^2A^2}{4s}\left\{\left[\frac{m(n^2-2ms+s^2)}{2s-m}\cos 2mx+\frac{n(m^2-2ns+s^2)}{2s-n}\cos 2ny+\right.\right.$$

$$\left.\left.+s^2\cos 2mx\cos 2ny\right]\sin^2\sigma t-mn\left(\frac{n}{2s-m}\cos 2mx+\frac{m}{2s-n}\cos 2ny\right)\right\}; \quad (15)$$

при этом $K=1$ и σ надо определить из (14). Заметим, что размерность в правой части (15) восстановится, если A^2, x и y умножить на K.

В заключение укажем особенности стоячей волны, вытекающие из точного уравнения ее поверхности.

1. Неподвижных узловых линий нет; узловые линии линейной волны $x=0$, $x=\pi/m$; $y=0$, $y=\pi/n$ движутся.

Для доказательства надо x и y определить из уравнения $z(x, y, t, \varepsilon)=0$, причем окажется, что эти корни зависят от t. Это движение происходит вдоль начальной искривленной поверхности нелинейной волны.

2. Максимальные амплитуды (пучности) будут в точках $x=\pi/2m$, $y=\pi/2n$ (гребень); $x=3\pi/2m$, $y=3\pi/2n$ (впадина) и при $t=\pi/2\sigma$.

3. Аппликата гребня волны больше аппликаты впадины.

4. При $t=0$ уравнение волновой поверхности имеет вид (приближенно):

$$z=-\frac{\varepsilon^2A^2}{4s}mn\left(\frac{n\cos 2mx}{2s-m}+\frac{m\cos 2ny}{2s-n}\right). \quad (16)$$

Следовательно, ввиду произвольности начального момента времени, волновая поверхность никогда не становится плоской.

Укажем, наконец, что изучаемое волновое движение жидкости имеет потенциал скоростей. Можно доказать, что коэффициенты разложений ξ, η, ζ содержат $\sin m\sigma t$ с нечетным m, а $\cos m\sigma t$ с четным m. Отсюда $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial t$ и $\partial z/\partial t$, т. е. скорости течения, равны нулю при $t=\pi/2\sigma$. Так как, кроме того, единственная внешняя сила — сила тяжести — имеет потенциал, то, согласно теореме Лагранжа, отсюда вытекает, что течение имеет потенциал скоростей.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
16 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. G. Penney, Price, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, No. 882, **244**, 254 (1952). [2] Я. И. Секерж-Зенькович, ДАН, **58**, № 4, 551 (1947). [3] Я. И. Секерж-Зенькович, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., **15**, в. 1, 57 (1951).