

И. И. МЕТЕЛИЦЫН

К ВОПРОСУ О ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 19 VII 1952)

1. Критерии устойчивости движения механических систем содержат требования, которым должны удовлетворять приложенные силы, чтобы корни характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть.

Хорошо известны теоремы Лагранжа, Кельвина, Раута, Жуковского, выражающие условия устойчивости в такой форме; в этих теоремах вскрывается также и влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость движения консервативных систем.

В настоящее время почти не используют эти условия в практических проблемах, так как механические и электромеханические системы, устойчивость движения которых приходится рассматривать, не являются консервативными. Критерии устойчивости Гурвица, Михайлова, Найквиста не случайно вытеснили классические критерии, так как они применимы к неконсервативным системам и удобны при практических расчетах.

Однако эти последние критерии не позволяют ответить на вопросы общего характера: какое влияние имеют, например, диссипативные или гироскопические или неконсервативные силы на устойчивость движения, можно ли улучшить или даже обеспечить устойчивость движения добавлением к имеющимся силам диссипативных сил, если система неустойчива, и т. д.

Если учесть, что в современной технике приборостроения имеются разработанные приемы осуществления искусственным путем различных категорий сил, то полезно предвидеть заранее, какой эффект можно получить добавлением сил той или иной категории к тем силам, которые действуют на систему в ее естественном состоянии.

Ниже изложены некоторые теоремы, позволяющие ответить на поставленные вопросы; теоремы не являются исчерпывающими, но они позволяют ориентироваться в этом круге вопросов перед тем, как переходить к детальному исследованию устойчивости хорошо известными приемами.

2. Пусть q_1, \dots, q_n — обобщенные координаты рассматриваемой системы. Уравнения движения системы (линейные) имеют вид:

$$\sum \{a_{ks}\ddot{q}_s + b_{ks}\dot{q}_s + c_{ks}q_s\} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь коэффициенты a_{ks} удовлетворяют условиям $a_{ks} = a_{sk}$, как коэффициенты квадратичной формы живой силы системы. Остальные коэффициенты можно представить в ином виде, положив:

$$\beta_{ik} = \frac{b_{ik} + b_{ki}}{2} = \beta_{ki}, \quad \gamma_{ik} = \frac{b_{ik} - b_{ki}}{2} = -\gamma_{ki},$$

$$\delta_{ik} = \frac{c_{ik} + c_{ki}}{2} = \delta_{ki}, \quad \varepsilon_{ik} = \frac{c_{ik} - c_{ki}}{2} = -\varepsilon_{ki}.$$

Этим приемом обычно разбивают обобщенные силы, зависящие от обобщенных скоростей, на диссипативные силы $\beta_{ik}\dot{q}_k$ и гироскопические силы $\gamma_{ik}\dot{q}_i$; аналогично этому и обобщенные силы, зависящие от обобщенных координат, можно разбить на консервативные силы $\delta_{ik}q_i$ и «собственно-неконсервативные» силы $\varepsilon_{ik}q_i$.

Теперь уравнения движения можно представить в следующем виде:

$$\sum \{a_{ks}\ddot{q}_s + \beta_{ks}\dot{q}_s + \gamma_{ks}\dot{q}_s + \delta_{ks}q_s + \varepsilon_{ks}q_s\} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Введем диссипативную функцию D и потенциальную энергию V :

$$D = \frac{1}{2} \sum_k \sum_s \beta_{ks} \dot{q}_k \dot{q}_s; \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_k \sum_s \delta_{ks} q_s q_k. \quad (3)$$

Полагая в уравнениях (1)

$$q_s = A_s e^{\mu t},$$

найдем уравнения для определения постоянных A_s и характеристическое уравнение:

$$\sum \{a_{ks}\mu^2 + (\beta_{ks} + \gamma_{ks})\mu + (\delta_{ks} + \varepsilon_{ks})\} A_s = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (4)$$

$$\Delta(\mu) = |a_{ks}\mu^2 + (\beta_{ks} + \gamma_{ks})\mu + (\delta_{ks} + \varepsilon_{ks})| = 0. \quad (5)$$

Предположим, что характеристическое уравнение (5) допускает комплексные сопряженные корни μ и μ' , каждому из которых соответствует своя система сопряженных значений постоянных

$$A_s = M_s + N_s i, \quad A'_s = M_s - N_s i. \quad (6)$$

Умножая уравнения (4) поочередно на A'_s и складывая, найдем следующее соотношение:

$$T(A, A')\mu^2 + [D(AA') + i\Gamma(AA')]\mu + V(AA') + iE(AA') = 0. \quad (7)$$

Коэффициенты при μ^2 , μ и свободный член имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} T(A, A') &= T(M) + T(N), & D(AA') &= D(M) + D(N), \\ i\Gamma(AA') &= i \sum \gamma_{ks} (M_k N_s - M_s N_k), & iE(AA') &= i \sum \varepsilon_{ks} (M_k N_s - M_s N_k). \end{aligned} \quad (8)$$

Не останавливаясь на выводе этих хорошо известных соотношений, отметим только, что T , V , D , Γ и E — действительные величины и, кроме того, T — определенная положительная квадратичная форма; мы предположим, что и D — также определенная положительная квадратичная форма, т. е. мы будем рассматривать системы, в которых диссипативные силы имеют обычный характер сил сопротивления. То разложение, которым мы воспользовались выше, может привести к диссипативной функции и иного характера.

Исследуем уравнение (7), которое можно было бы привести после надлежащих преобразований к характеристическому уравнению, не содержащему произвольных, постоянных; оно отличается от характеристического уравнения только группировкой слагаемых, благодаря чему имеет вид квадратного уравнения относительно μ .

Разрешая уравнение (7) относительно μ , получим:

$$\mu = \frac{-(D + i\Gamma) \pm V \sqrt{(D + i\Gamma)^2 - 4T(V + iE)}}{2T} = \frac{-(D \mp x) - i\Gamma \left(1 \mp \frac{D}{x}\right)}{2T}, \quad (9)$$

где

$$x^2 = \frac{D^2 - \Gamma^2 - 4VT}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\Gamma^2 + 4VT - D^2)^2 + 4(D\Gamma - 4TE)^2}. \quad (10)$$

Так как квадратичная форма D определенно-положительная, то движение будет устойчивым, если удовлетворено неравенство

$$x^2 < D^2,$$

или

$$4TE^2 - 2D\Gamma E < D^2V. \quad (11)$$

Последнее неравенство и выражает условие устойчивости неконсервативных систем.

Отметим теоремы, вытекающие из неравенства (11).

Теорема 1. Если консервативная система статически неустойчива, то добавлением собственно-неконсервативных сил (без диссипативных и гироскопических) нельзя сделать систему устойчивой.

В самом деле, если $D \equiv 0$ и $\Gamma \equiv 0$, то условие $4TE^2 < 0$ не может быть удовлетворено.

Теорема 2. Если консервативная система статически устойчива, то добавление собственно-неконсервативных сил (без диссипативных и гироскопических) может сделать систему неустойчивой.

Теорема 3. Собственно-неконсервативная система ($V \equiv 0$) может быть сделана устойчивой только при условии, что к действующим силам одновременно добавляются гироскопические и диссипативные силы.

Действительно, при $V \equiv 0$ условие устойчивости (11) может быть удовлетворено только в том случае, если $4TE^2 < 4E\Gamma D$, т. е. Γ и D не равны нулю.

Теорема 4. Статически неустойчивая система может быть сделана устойчивой, если к приложенным силам одновременно добавить диссипативные, гироскопические и собственно-неконсервативные силы.

Так как в рассматриваемом случае $V < 0$, то $4TE^2 - 2D\Gamma E < VD^2 < 0$; отсюда следует, во-первых, $4TE^2 < 2D\Gamma E$, т. е. $\Gamma E > 0$, а во-вторых, что диссипативные и гироскопические силы должны быть достаточно интенсивны.

Теорема 5. Если условие устойчивости (11) удовлетворено и если гироскопические силы доминируют над остальными, то частоты колебаний системы расходятся, т. е. одни из них делаются весьма малыми, а другие — весьма большими.

Из равенства (10) находим:

$$x \simeq D - \frac{4TE}{\Gamma} - D \frac{4VT - D^2}{2T^2};$$

отсюда следует, что x мало отличается от D , а потому из двух величин $\nu_1 = \frac{\Gamma}{2T} \left(1 - \frac{D}{x}\right)$, $\nu_2 = \frac{\Gamma}{2T} \left(1 + \frac{D}{x}\right)$ вторая будет во много раз больше первой: $\nu_2 \gg \nu_1$.

Теорема 6. Если условие устойчивости удовлетворено и гироскопические силы являются доминирующими, то колебаниям с более высокими частотами соответствует более интенсивное затухание по сравнению с затуханием медленных колебаний.

В самом деле, колебаниям с частотой $\frac{\Gamma}{2T} \left(1 - \frac{D}{x}\right)$ соответствует коэффициент затухания $\frac{D-x}{2T}$, а колебаниям с частотой $\frac{\Gamma}{2T} \left(1 + \frac{D}{x}\right)$ — коэффициент $\frac{D+x}{2T}$; так как $x > 0$ и при больших гироскопических силах x мало отличается от D , то медленные колебания затухают медленнее, а быстрые колебания затухают быстрее.

Этим свойством колебаний гироскопических систем пользуются для упрощения исследований, так как в практических расчетах можно ограничиться изучением медленных прецессионных колебаний.

Отбрасывая в уравнении (7) слагаемые с коэффициентами Γ и D , получают «укороченное» уравнение

$$i\Gamma\mu + V + iE = 0, \quad (12)$$

откуда

$$\mu = -\frac{E}{\Gamma} + \frac{V}{\Gamma}i.$$

Если $E/\Gamma > 0$, то медленные прецессионные колебания затухают, и собственно-неконсервативные силы выступают в роли диссипативных сил. Отсюда можно было бы сделать неправильный вывод, что стабилизация гироскопической системы может быть достигнута добавлением одних лишь неконсервативных сил. Из предыдущего следует, что диссипативная функция D не должна равняться нулю, и в любой гироскопической системе следует искать источник диссипативных сил, если даже отсутствуют какие-либо специальные приспособления для демпфирования колебаний.

Все перечисленные теоремы легко иллюстрировать на хорошо известных гироскопических приборах.

Поступило
13 V 1952