Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

О ПОДГРУППАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 11 VII 1952)

§ 1. Основной теоремой теории групп, позволяющей устанавливать у группы существование подгрупп, является, бесспорно, теорема Силова. Особенно велико ее значение в области конечных групп, где она является незаменимым и постоянно используемым средством исследования. Вокруг этой теоремы создалась обширная литература, содержащая много ее аналогов и обобщений. В настоящей статье, как и в предыдущих статьях ([1–10]), приводятся полученные нами некоторые предложения этого же типа, являющиеся или достаточными или необходимыми признаками существования, а в некоторых случаях также еще и сопряженности подгрупп определенного вида. При этом мы обобщаем нашу основную теорему о П-отделимых группах ([3]), а также теорему Шура ([11]), теорему, обратную теореме Ф. Голла о разрешимых группах ([12]), и три теоремы Орэ о максимальных подгруппах разрешимых групп ([13]). Мы применяем наши прежние обозначения и терминологию, полностью приведенные в нашей статье ([10]), с одним только видоизменением: в определении П-силовского делителя порядка группы мы допускаем также и тот случай, когда множество простых чисел П является пустым.

§ 2. Для П-отделимых групп мы получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для того чтоды группа $\mathfrak{G}$ была П-отделимой, необходимо и достаточно, чтобы у $\mathfrak{G}$ существовал П-перестановочный ряд, каждый индекс которого среди всех своих различных простых делителей содержал бы не более одного простого числа из* П.

Как следствие отсюда получается:

Теорема 2. *Если группа $\mathfrak{G}$ порядка $g = ab$, где b — наибольший П-силовский делитель числа g, имеет П-перестановочный ряд, каждый индекс которого среди всех своих различных простых делителей содержит не более одного простого числа из* П, *то $\mathfrak{G}$ имеет, по крайней мере, одну разрешимую подгруппу $\mathfrak{B}$ порядка b и все подгруппы этого порядка группы $\mathfrak{G}$ сопряжены в $\mathfrak{G}$ с $\mathfrak{B}$.*

Другими словами, группа $\mathfrak{G}$ при этих условиях будет типа П1. Теорема 2 является обобщением нашей основной теоремы о П-отделимых группах ([3]) и показывает, что условия этой основной теоремы о П-отделимых группах могут быть двояко ослаблены. Во-первых, нормальный ряд может быть заменен более общим П-перестановочным рядом и, во-вторых, из ограничений, накладываемых на фактор-структуры ряда, можно исключить все условия типа сопряженности и разрешимости, какие были в наших работах ([1–10]), оставив лишь только одно чисто арифметическое требование.

Отметим еще следующую теорему.

Теорема 3. *Если группа $\mathfrak{G}$ имеет П-перестановочный ряд, все индексы которого делятся не более чем на два каких-либо различных простых числа, которые к тому же входят в П, то $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа.*

§ 3. Достаточным признаком существования подгрупп является следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ порядка $g = a_1 b_1 g_1$ содержит инвариантную подгруппу $\mathfrak{G}_1$ порядка g_1 и пусть $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ имеет хотя бы одну подгруппу порядка b_1. Пусть П является множеством всех различных простых делителей числа b_1 и пусть b' является таким делителем числа $g_1 = a'b'$, что b' делится на наибольший П-силовский делитель числа g_1. Если тогда $\mathfrak{G}_1$ содержит подгруппу $\mathfrak{B}'$ порядка b' и все подгруппы из $\mathfrak{G}$, сопряженные с $\mathfrak{B}'$ в $\mathfrak{G}$, сопряжены с $\mathfrak{B}'$ уже в $\mathfrak{G}_1$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет, по крайней мере, одну подгруппу порядка $b = b_1 b'$.*

Доказательство этой теоремы проводится в основном способом, разработанным нами в статьях [1-10] (см., например, статью [8]).

Полагая $a_1 = 1$ и $(b_1, g_1) = 1$, получим, как частный случай теоремы 4, известную теорему Шура [11].

Отметим еще несколько частных случаев теоремы 4, имеющих, на наш взгляд, известное практическое значение.

Пусть группа $\mathfrak{G}$ порядка mn имеет нормальный делитель порядка n. Пусть p и q — произвольные простые делители соответственно чисел m и n. Пусть p^{α_1} — произвольная степень p, делящая m, и пусть q^{β} — наивысшая степень q, делящая n. Тогда рассмотрим следующие случаи:

1. Случай Шура. Числа m и n взаимно просты. Теорема Шура устанавливает тогда существование подгрупп порядка m. Теорема 4 дополнительно устанавливает еще и существование подгрупп порядка mq^{β} и $p^{\alpha_1}q^{\beta}$.

2. Случай произвольного нормального делителя. Если $(m, n) = q^{\beta_1}$, то, по теореме 4, вытекает существование подгрупп порядка mq^{β}; если же (m, n) произвольно, но p не делит n, то существование подгрупп порядка $p^{\alpha_1}q^{\beta}$.

3. Случай разрешимого нормального делителя. Если $(m, n) = d$ и dk — такой делитель n, что $(dk, n/dk) = 1$, то, по теореме 4, вытекает существование подгрупп порядка mdk и $p^{\alpha_1}dk$.

Если δ — такой делитель n, что $(\delta, n/\delta) = 1$ и p не делит n или, деля n делит δ, то, по теореме 4, вытекает существование подгрупп порядка $p^{\alpha_1}\delta$.

4. Случай П-отделимого нормального делителя. Пусть d, k и δ имеют те же значения, что и в случае 3.

Если П есть множество всех различных простых делителей числа dk, то существуют подгруппы порядков mdk и $p^{\alpha_1}dk$.

Если П — множество всех простых делителей числа δ и p не делит n или, деля n, делит δ, то получается существование подгрупп порядка $p^{\alpha_1}\delta$.

§ 4. Переходим к рассмотрению необходимых признаков существования подгрупп.

В 1928 г. Ф. Голл доказал [12] свою известную теорему о разрешимых группах:

А. Если $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа порядка mn, где $(m, n) = 1$, то $\mathfrak{G}$ содержит подгруппы порядков m и n.

В 1937 г. Ф. Голл [14] и, независимо от него, С. А. Чунихин [15] доказали справедливость и обратной теоремы:

Б. Если всякому представлению порядка g группы $\mathfrak{G}$ в виде произведения двух взаимно-простых множителей $g = mn$, $(m, n) = 1$, соответствуют подгруппы порядков m и n группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа.

В 1947 г. С. А. Чунихин ([1-3]), используя введенные им понятия П-разрешимых и П-отделимых групп, показал справедливость основных утверждений теоремы Ф. Голла о существовании и сопряженности подгрупп и для этих более широких классов групп, установив, что оба указанных вида групп являются группами типа П1.

В 1950 г. С. А. Чунихин ([8]) усилил этот результат для П-разрешимых групп, показав, что они являются также и группами типа П2, что, в частности, приводит к справедливости следующего утверждения:

В. Если $\mathfrak{G}$ — П-разрешимая группа порядка $g = mn$, где n есть некоторый П-силовский делитель g, то $\mathfrak{G}$ содержит подгруппы порядков m и n.

Возникает вопрос: если теорема В есть перенесение А на класс П-разрешимых групп, то каким образом может быть в этом плане обобщено обратное предложение Б?

Пример простой группы 60-го порядка, имеющей подгруппы порядков 5 и 12 и не являющейся 5-разрешимой, показывает, что для обращения теоремы В П-разрешимые группы уже недостаточны, и необходимо перейти к рассмотрению групп некоторого более широкого класса. Нижеследующие теоремы показывают, что класс этих групп составляет некоторую часть класса П-отделимых групп.

Теорема 5. *Если всякому представлению порядка g группы $\mathfrak{G}$ в виде произведения двух взаимно-простых множителей $g = mn$, где n есть некоторый П-силовский делитель порядка g группы $\mathfrak{G}$, соответствуют подгруппы порядков m и n группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ является П-отделимой группой.*

Для доказательства этой теоремы сначала показываем, что всякий нормальный делитель $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{G}$ и всякая фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ обладают свойством рассматриваемого вида. Затем, применяя неоднократно использовавшийся нами метод „композиции подгрупп“ (см., например, работу ([16])), обнаруживаем существование у $\mathfrak{G}$, в случае когда П содержит более одного простого числа, нетривиального нормального делителя. Применение после этого метода индукции доказывает теорему.

Обратимся опять к простой группе 60-го порядка. Она П-отделима, если $\Pi = \{2\}$, но представлению ее порядка в виде произведения $2^2 \cdot 15$ не соответствует подгруппы порядка 15. Получается:

Теорема 6. *Существуют такие множества П, для которых класс групп, удовлетворяющих условиям теоремы 5, строго уже класса П-отделимых групп.*

§ 5. Рассмотрим теперь максимальные подгруппы П-разрешимых групп. Для них получаются следующие предложения.

Напомним, что максимальной подгруппой мы называем при $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$ истинную подгруппу, не являющуюся истинной подгруппой никакой другой истинной подгруппы, и саму $\mathfrak{G}$ при $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$.

Теорема 7. *Если группа $\mathfrak{G}$ является П-разрешимой, то индекс ее любой максимальной подгруппы или есть степень некоторого простого числа из П, или же не делится ни на одно простое число из П. Если при этом $g = ab$, где b — наибольший П-силовский делитель порядка g группы $\mathfrak{G}$, то при $b > 1$ существуют максимальные подгруппы первого вида и при $a > 1$ — максимальные подгруппы второго вида.*

Доказательство основано на лемме (Н) нашей работы ([7]) и теореме 2 нашей статьи ([8]).

Теорема 8. *Если $\mathfrak{G}$ П-разрешима, то всякому простому числу* *p, входящему в* Π *и делящему порядок* $\mathfrak{G}$, *соответствует максимальная подгруппа из* $\mathfrak{G}$, *индекс которой есть степень p.*

Теорема 8 есть следствие теоремы 2 ([8]).

Используем сейчас следующую терминологию Орэ ([13]): подгруппа $\mathfrak{H}$ групп $\mathfrak{G}$ называется принадлежащей к нормальному делителю $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$, если $\mathfrak{H}$ не содержит никаких нормальных делителей $\mathfrak{G}$, содержащих $\mathfrak{N}$ и отличных от $\mathfrak{N}$.

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 9. *Если группа* $\mathfrak{G}$ *порядка* $g = ab$, *где* b — *наибольший* Π-*силовский делитель числа* g *и* $a \neq g$, *является* Π-*разрешимой, то все ее максимальные подгруппы, порядки которых делятся на* a *и которые принадлежат одной и той же инвариантной подгруппе* $\mathfrak{N}$ *группы* $\mathfrak{G}$, *сопряжены между собой.*

Доказательство этой теоремы, проведенное подробно, является довольно длинным и основано на применении метода, развитого в главе 4 работы Орэ ([13]), в сочетании с нашими леммой (H) работы ([7]) и теоремой 2 статьи ([8]).

Теорема 10. *Если* $\mathfrak{G}$ — *группа и* $\mathfrak{M}_1$ *и* $\mathfrak{M}_2$ — *ее максимальные подгруппы, принадлежащие различным нормальным делителям* $\mathfrak{N}_1$ *и* $\mathfrak{N}_2$ *группы* $\mathfrak{G}$, *и если* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}_1$ *и* $\mathfrak{M}_2$ *удовлетворяют условиям теоремы* 9, *то* $\mathfrak{M}_1$ *и* $\mathfrak{M}_2$ *перестановочны.*

При $a = 1$ из теорем 8, 9 и 10, как их частные случаи, получаются, соответственно, теоремы 13, 11 и 14 главы 4 работы Орэ ([13]).

Поступило
9 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чунихин, ДАН, 55, № 6 (1947). [2] С. А. Чунихин, ДАН, 58, № 7 (1947). [3] С. А. Чунихин, ДАН, 59, № 3 (1948). [4] С. А. Чунихин, ДАН, 60, № 5 (1948). [5] С. А. Чунихин, ДАН, 66, № 2 (1949). [6] С. А. Чунихин, ДАН, 69, № 6 (1949). [7] С. А. Чунихин, Матем. сборн., 25 (67), № 3 (1949). [8] С. А. Чунихин, ДАН, 73, № 1 (1950). [9] С. А. Чунихин, ДАН, 77, № 6 (1951). [10] С. А. Чунихин, ДАН, 83, № 5 (1952). [11] H. Zassenhaus, Lehrb. d. Gruppentheorie, 1, 1937, S. 125, Satz 25. [12] Ph. Hall, J. London Math. Soc., 3, 98 (1928). [13] O. Ore, Duke Math. J., 5, 431 (1939). [14] Ph. Hall, J. London Math. Soc., 12, 198 (1937). [15] С. А. Чунихин, Изв. НИИММ Томск. гос. ун-та, 2, 220 (1938). [16] С. А. Чунихин, Тр. семинара по теории групп, М., 1938, стр. 106.