

А. П. НОРДЕН и М. Е. ЦЫПКИН

О СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ЛИНЕЙЧАТЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ И КРИВЫМИ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 VII 1952)

Многообразие прямых, плюккеровы координаты которых удовлетворяют линейному уравнению $v_\alpha x^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \dots, 6$), называется линейным комплексом или винтом v , а шесть чисел — его координатами. Если x^1, x^2, x^3 и x^4, x^5, x^6 пропорциональны, соответственно, составляющим единичного направляющего вектора и момента прямой евклидова пространства, то каждому комплексу v можно поставить в соответствие полярный комплекс \bar{v} с координатами $(0, 0, 0, v_1, v_2, v_3)$.

Плюккеровым произведением двух комплексов называется выражение

$$v\bar{w} = v_1 w_4 + v_2 w_5 + v_3 w_6 + v_4 w_1 + v_5 w_2 + v_6 w_3, \quad (1)$$

а скалярным произведением

$$v\bar{w} = \bar{v}w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \quad (2)$$

Условие $x^2 = 0$, которому удовлетворяют координаты специального комплекса x , совпадает с условием Плюккера для прямой.

Координаты собственных прямых условимся нормировать следующим образом:

$$x\bar{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \quad (3)$$

Плюккеро и скалярное произведения прямых x и y представляют собою совместные инварианты этих прямых $xy = -l \sin \varphi$, $x\bar{y} = \cos \varphi$, где l — кратчайшее расстояние, φ — угол между прямыми, а $l \sin \varphi$ — взаимный момент этих прямых. Из этих формул, пользуясь условием нормировки $x\bar{x} = 1$ и условием Плюккера $x^2 = 0$, легко получить

$$dx^2 = 2dl d\varphi, \quad dx \bar{dx} = d\varphi^2, \quad (4)$$

где $d\varphi$ — элемент длины сферического изображения линейчатого пространства, а $2dl d\varphi$ — взаимный момент двух бесконечно близких прямых.

Линейный комплекс v можно задать осью x и параметром (шагом) h , определяемым из уравнений:

$$\sqrt{v\bar{v}} x = v - h\bar{v}, \quad h = v^2 / 2v\bar{v}. \quad (5)$$

Если каждому винту в евклидовом пространстве E_3 поставить в соответствие точку пятимерного проективного пространства P_5 , то

множеству всех специальных винтов (прямых) будет отвечать в пространстве P_5 гиперповерхность второго порядка Q_4 ((1), стр. 278). Цель статьи — ввести на Q_4 некоторую внутреннюю геометрию и применить ее к теории линейчатых поверхностей, изучаемых в связи с теорией кривых на Q_4 .

Пусть u^1, u^2, u^3, u^4 — криволинейные координаты на Q_4 . Свяжем с каждой точкой x репер, одна из вершин которого совпадает с x , другая с \bar{x} , а остальные четыре находятся в точках $x_i = \partial x / \partial u^i$, и введем два симметрических тензора $x_i x_j = p_{ij}$ и $\bar{x}_i \bar{x}_j = g_{ij}$; тогда

$$p_{ij} du^i du^j = d\varphi^2 \quad g_{ij} du^i du^j = 2dl d\varphi. \quad (6)$$

Таким образом, в геометрии на Q_4 существуют два метрических тензора, из которых p_{ij} определяет элемент длины сферического изображения линейчатого пространства, а g_{ij} — взаимный момент двух бесконечно близких прямых. Тензор p_{ij} имеет ранг 2, а g_{ij} — ранг 4 и сигнатуру $++--$. Иными словами, геометрия на Q_4 — риманова, если за основную форму принять взаимный момент двух бесконечно близких прямых.

Если выразить линейно точку $\bar{\partial}_j x_i$ через x, x_k и \bar{x} и воспользоваться условиями $x^2 = 0$ и $x\bar{x} = 1$, то мы найдем $\bar{\partial}_j x_i - \Gamma_{ij}^k x_k = -g_{ij} \bar{x} - p_{ij} x$. Величины Γ_{ij}^k являются компонентами связности без кручения, так что можно записать:

$$\nabla_j x_i = -g_{ij} \bar{x} - p_{ij} x, \quad (7)$$

где ∇ — символ ковариантного дифференцирования.

Приведя аналогичные рассуждения для точки \bar{x}_i , найдем:

$$\nabla_j \bar{x}_i = -p_{ij} \bar{x}. \quad (8)$$

Тензоры g_{ij} и p_{ij} ковариантно постоянны, т. е.

$$\nabla_k g_{ij} = \nabla_k p_{ij} = 0. \quad (9)$$

Тензор кривизны имеет следующую структуру:

$$R_{kji}^r = g_{i[k} p_{j]s} g^{sr} + p_{i[k} \delta_{j]}^r \quad (10)$$

Отсюда следует, что риманово пространство на Q_4 симметрическое, а геометрия конформно евклидова.

Со всяким направлением v^i , исходящим из точки x и принадлежащим Q_4 , свяжем винт

$$v = v^i x_i, \quad (11)$$

который будем называть винтом направления, приложенным к прямой x . Винт направления v характеризуется тем, что его ось совпадает со стрикционной нормалью*, а шаг — с параметром распределения такой линейчатой поверхности, образом которой на Q_4 служит кривая, касающаяся направления v^i в точке x . Таким образом, ось винта направления пересекает прямую x под прямым углом.

* Стрикционной нормалью развортывающейся поверхности называют главную нормаль ребра возврата.

Винт направления

$$\frac{Dv}{d\sigma} = x_i \frac{\delta v^i}{d\sigma}, \quad (12)$$

где δ — символ абсолютного дифференцирования в римановой геометрии на Q_4 , назовем винтовой производной винта направления.

Условимся говорить, что винт направления v переносится по линейчатой поверхности $x = x(\sigma)$ параллельно, если $Dv/d\sigma = 0$. Этому условию можно придать вид:

$$\frac{dv}{d\sigma} = - \left(v \frac{dx}{d\sigma} \right) \bar{x} - \left(v \frac{d\bar{x}}{d\sigma} \right) x. \quad (13)$$

Приведем три основных свойства параллельно переносимых винтов с конечным шагом (собственных винтов): 1) если собственный винт v переносится параллельно по поверхности $x = x(\sigma)$, то образующая x совпадает со стрикционной нормалью поверхности, составленной из осей этих винтов; 2) при параллельном переносе собственного винта шаг его не меняется; 3) угол и кратчайшее расстояние между осями параллельно переносимых собственных винтов постоянны.

Пусть кривой, заданной на Q_4 уравнением $u^i = u^i(s)$ ($i = 0, 1, 2, 3$), где s — длина ее дуги, соответствует в E_5 линейчатая поверхность $x = x(s)$. Условимся называть поверхности, отвечающие обыкновенным кривым ((²), стр. 24) на Q_4 , обыкновенными поверхностями, а все остальные поверхности — необыкновенными.

Если записать для обыкновенной кривой на Q_4 формулы Френе — Серре ((²), стр. 25), умножить обе части их на x_i и свернуть по i , то мы придем к следующим уравнениям:

$$t_0 = \frac{dx}{ds}; \quad \frac{Dt}{ds} = \begin{matrix} 0 \\ \varepsilon x t \\ 011 \end{matrix}; \quad (14)$$

$$\frac{Dt}{ds} = \begin{matrix} 2 \\ \varepsilon (-x t + x t) \\ 21 \quad 33 \end{matrix}; \quad \frac{Dt}{ds} = \begin{matrix} 1 \\ \varepsilon (-x t + x t) \\ 1 \quad 10 \quad 22 \end{matrix}; \quad \frac{Dt}{ds} = \begin{matrix} 3 \\ -\varepsilon x t \\ 322 \end{matrix},$$

где D — символ винтовой производной, а винты t — обыкновенные (не нулевого шага), причем $t^2 = \varepsilon = \pm 1$, $tt = 0$ ($i \neq j$). Скаляры x_1, x_2, x_3 будем называть, соответственно, кривизной, кручением и изгибом поверхности.

Произведем классификацию линейчатых поверхностей, положив за основу классификацию кривых в римановой геометрии на Q_4 .

Обыкновенные поверхности делятся на поверхности нулевой кривизны ($x_1 = 0$), нулевого кручения ($x_2 = 0$), нулевого изгиба ($x_3 = 0$) и поверхности тройной кривизны ($x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 = 0$). Всегда можно считать, что обращение одной из кривизн в нуль влечет за собою обращение в нуль всех последующих кривизн.

Необыкновенные поверхности делятся на 0-изотропные ($t^2 = 0$), 1-изотропные ($t^2 = 0$) и 2-изотропные ($t^2 = 0$). Любая необыкновенная поверхность входит в один из этих классов, потому что случай $t^2 = 0$, когда винты t_0, t_1 и t_2 обыкновенные, невозможен. Всякая k -изотропная поверхность, в свою очередь, делится на k -изотропную несобственную поверхность, если $tt = 0$, и k -изотропную поверхность, если $tt \neq 0$.

Если $\kappa = 0$, то винты t_1 и t_2 неопределенные, и, следовательно, поверхность нулевой кривизны можно рассматривать как поверхность или 1-изотропную или 2-изотропную. Поверхность нулевого кручения по той же причине можно рассматривать как поверхность 2-изотропную. Точно так же 1-изотропную собственную поверхность можно считать 2-изотропной собственной, а 1-изотропную несобственную — 2-изотропной несобственной.

Дадим сводку результатов исследования линейчатых поверхностей.

Теорема 1. *Чтобы $x(s)$ была поверхностью нулевой кривизны, необходимо и достаточно, чтобы она была геликоидом.*

Теорема 2. *Чтобы $x(s)$ была поверхностью нулевого кручения с постоянным параметром распределения, необходимо и достаточно, чтобы она была образована бинормальными кривой постоянного кручения.*

Обе линии нулевой средней кривизны такой поверхности изотропны.

Теорема 3. *Чтобы $x(s)$ была поверхностью нулевого кручения с непостоянным параметром распределения, необходимо и достаточно, чтобы она была поверхностью стрикционных нормалей развертывающейся поверхности, ребром возврата которой служит или линия Бертрана или линия откоса.*

В первом случае обе линии нулевой средней кривизны сопряжены в смысле Бертрана, а во втором случае единственная линия нулевой средней кривизны есть линия откоса.

Теорема 4. *Чтобы $x(s)$ была поверхностью нулевого изгиба, необходимо и достаточно, чтобы она была поверхностью стрикционных нормалей поверхности с постоянным параметром распределения $\pi \neq 0$.*

Теорема 5. *Чтобы $x(s)$ была 0-изотропной поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы она была развертывающейся поверхностью.*

В частности, 0-изотропная несобственная поверхность есть поверхность цилиндрическая.

Теорема 6. *Чтобы $x(s)$ была 1-изотропной несобственной поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы она была поверхностью Каталана с постоянным параметром распределения.*

Теорема 7. *Чтобы $x(s)$ была 1-изотропной собственной поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы на ней обе линии нулевой средней кривизны совпадали.*

Примером может служить поверхность главных нормалей кривой постоянного кручения.

Теорема 8. *Чтобы $x(s)$ была 2-изотропной несобственной поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы она была поверхностью Каталана.*

Теорема 9. *Чтобы $x(s)$ была 2-изотропной собственной поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы она была образована главными нормальными кривой.*

Эта кривая служит на этой поверхности одной из линий нулевой средней кривизны.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
4 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. П. Фиников, Теория конгруенций, 1950. ² И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, 2, 1948.