Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. М. ГРОБМАН

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, АНАЛОГИЧНЫЕ ЛИНЕЙНЫМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 VII 1952)

1. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{2}$$

где A — постоянная матрица; x и y — n-мерные векторы; $f(t, x)$ — n-мерный вектор, определенный и непрерывный для $t \geqslant t_0$ и любого x;

$$f(t, 0) = 0; \tag{3}$$

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant g(t)\,|x' - x''|, \quad g(t) \geqslant 0; \tag{4}$$

$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_s$ — все различные действительные части собственных значений матрицы A.

Обозначим, соответственно, через $E_k(x)$ и $E_k(y)$ множества решений уравнений (1) и (2), характеристические показатели которых равны ω_k.

Определение 1. Решения x и y из $E_k(x)$ и $E_k(y)$, для которых $|x - y| = o(e^{\omega_k t})$ при $t \to \infty$, назовем аналогичными.

Определение 2. Скажем, что уравнения (1) и (2) аналогичны по показателю ω_k, если между множествами $E_k(x)$ и $E_k(y)$ можно установить такое взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное соответствие, что соответствующие решения будут аналогичны.

Заметим, что системы, аналогичные по всем показателям, ведут себя одинаково в смысле устойчивости и неустойчивости по Ляпунову; кроме того, ограниченность или неограниченность решений одной из них влечет за собой ограниченность или неограниченность решений другой.

Приведем матрицу A к жордановой форме, рассмотрим те ее ящики, которые соответствуют собственным значениям с действительными частями ω_k, и пусть $m_k + 1$ — порядок максимального из них.

Теорема 1. *Если*

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{2m_k} g(t)\,dt < +\infty,$$

то уравнения (1) *и* (2) *аналогичны по показателю* ω_k *и для аналогичных решений* x *и* y *из* $E_k(x)$ *и* $E_k(y)$ *справедливо равенство* $|x-y|=o\left(\frac{e^{\omega_k t}}{t^{m_k-i}}\right)$, *где* i — *число, определяемое условием* $|y| = O(e^{\omega_k t} t^i)$.

Обозначив через $m+1$ порядок максимального ящика жордановой формы матрицы A, получим из теоремы 1:

Следствие. *Если*

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{2m}\, g(t)\, dt < +\infty,$$

то уравнения (1) *и* (2) *аналогичны по всем показателям.*

Пусть $f(t, x) = B(t)x$. Тогда $g(t) = |B(t)|$, и предыдущее условие приобретает вид:

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{2m}\, |B(t)|\, dt < +\infty. \tag{$*$}$$

Как показал В. А. Якубович, выполнение условия $(*)$ достаточно для приводимости уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \{A + B(t)\}\, x \tag{5}$$

к уравнению (2) при помощи линейного преобразования, стремящегося при $t \to \infty$ к единичному [1]. Этот результат можно легко вывести из следствия к теореме 1.

Пусть Y — нормальная треугольная матрица уравнения (2). Построив для каждого ее столбца аналогичное ему решение x, получим матрицу $X = Y + Z$, причем норма z_i (i-го столбца матрицы Z) есть $o(e^{\lambda_i t})$, где λ_i — характеристический показатель i-го столбца матрицы Y. Пусть $X = PY$. Тогда $P = XY^{-1} = (Y + Z)\, Y^{-1} = E + ZY^{-1}$. Оценивая нормы столбцов матрицы ZY^{-1} (начиная с последнего), мы убедимся, что $ZY^{-1} \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, $P \to E$ при $t \to \infty$, и преобразование $x = Py$ приводит уравнение (5) к уравнению (2).

В. В. Немыцким предложено следующее определение. Две системы дифференциальных уравнений называются асимптотически эквивалентными, если между их решениями можно установить такое топологическое соответствие, при котором для соответствующих решений x и y справедливо соотношение $|x - y| \to 0$, когда $t \to \infty$. Теорема 1 для случая, когда все характеристические показатели уравнения (2) равны 0, устанавливает асимптотическую эквивалентность уравнений (1) и (2).

2. Пусть $f(t, x)$ определен и непрерывен для $t \geqslant t_0$ и x, принадлежащих некоторой ограниченной области G, содержащей начало координат; пусть в G $f(t, x)$ обладает свойствами (3) и (4), и пусть $m + 1$ — порядок максимального ящика матрицы A из числа тех, которые соответствуют собственным значениям ее с отрицательными действительными частями.

Простым следствием теоремы 1 является:

Теорема 2. *Если*

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{2m}\, g(t)\, dt < +\infty,$$

то уравнения (1) *и* (2) *аналогичны в малом по всем отрицательным показателям.*

(Аналогия в малом означает, что соответствие, требуемое определением 2, устанавливается не для всяких x и y, а только для таких, которые при $t=t_0$ находятся в достаточно малой окрестности начала координат).

Теорема 3. *Пусть вектор* $f(t, x)$ *определен и непрерывен для* $t \geqslant t_0$ *и* $x \in G$, $f(t, 0)=0$, $|f(t, x')-f(t, x'')| \leqslant \beta(r)|x'-x''|$, *где* $r=\max\{|x'|, |x''|\}$, $\beta(r) \geqslant 0$.

Если $\beta(r) \leqslant \frac{K}{|\ln r|^{2m+1+\varepsilon}}$, *где* K *и* ε — *какие-нибудь положительные числа, то уравнения* (1) *и* (2) *аналогичны в малом по всем отрицательным показателям.*

И. Г. Петровский показал, что поведение интегральных кривых уравнения типа (1) вблизи особой точки в основном определяется матрицей A [2]. Теорема 3 уточняет это утверждение Петровского и устанавливает его при меньших ограничениях на $f(t, x)$.

Теорема 4. *Если*

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{\alpha t} g(t)\, dt < +\infty \quad (\alpha > 0),$$

то для аналогичных решений x и y с показателями ω_k *справедливо равенство* $|x-y| = o\left(e^{(\omega_k-\alpha+\varepsilon) t}\right)$, *где* $\varepsilon > 0$ *произвольно мало.*

3. Из теорем 1 и 4 можно вывести следствия и для систем, близких к системам с переменными коэффициентами.

Пусть даны уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x + f(t, x), \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y, \tag{7}$$

где $A(t)$ — непрерывная и ограниченная на $[t_0, \infty)$ матрица; $f(t, x)$ — n-мерный вектор, определенный и непрерывный для $t \geqslant t_0$ и любого x, обладающий свойствами (3) и (4); пусть μ — коэффициент неправильности уравнения (7) [3].

Теорема 5. *Если для какого-либо* $\alpha > 0$

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{(\mu+\alpha) t} g(t)\, dt < +\infty,$$

то уравнения (6) *и* (7) *аналогичны по всем показателям.*

Доказательство основано на том, что преобразование

$$u = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} Y x,$$

где $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — характеристические показатели уравнения (7), а Y — его нормальная матрица, приводит уравнение (6) к виду, изученному в теореме 1.

Теорема 5 показывает, что для аналогии двух линейных систем $\frac{dx}{dt} = A(t)\, x$ и $\frac{dy}{dt} = B(t)\, y$ достаточно, чтобы

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{(\mu+\alpha) t} |A(t) - B(t)|\, dt < +\infty, \tag{8}$$

где μ — коэффициент неправильности одной из этих систем. (Коэффициенты неправильности этих систем равны, так как их показатели и показатели систем, к ним сопряженных, совпадают.)

Очевидно, всякую непрерывную на $[t_0, \infty)$ матрицу $A(t)$ можно аппроксимировать такой дифференцируемой матрицей $B(t)$, что условие (8) будет выполняться при любом α. Поэтому в вопросах устойчивости и в других вопросах качественной теории всегда можно считать матрицу $A(t)$ дифференцируемой. Нетрудно доказать также, что если для двух линейных систем удовлетворяется (8), то каждая из них приводима к другой при помощи линейного преобразования, матрица которого стремится к единичной, когда $t \to \infty$.

Теорема 6. *Пусть $f(t, x)$ удовлетворяет трем первым требованиям теоремы 3; пусть $\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_m < 0$ — характеристические показатели уравнения (7) и $\beta(r) < Kr^l$, где K и l — некоторые положительные числа и $l > \frac{\mu}{|\omega_i|} + 1$ $(i \leqslant m)$. Тогда уравнения (6) и (7) аналогичны в малом по показателям $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i$. Если уравнение (7) правильно и $l > 1$, то уравнения (6) и (7) аналогичны в малом по всем отрицательным показателям. Кроме того, для аналогичных решений имеет место равенство $|x - y| = o(|y|)$, которое обнаруживает большое сходство в асимптотическом поведении этих решений.*

Теорема 6 уточняет некоторые результаты автора, а вместе с ними и результаты А. М. Ляпунова и К. П. Персидского [3].

Поступило
24 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Якубович, ДАН, 66, № 4 (1949). [2] И. Г. Петровский, Матем. сборн., 41, в 1, 48 (1934). [3] Д. М. Гробман, Матем. сборн., 30 в. 1, 121 (1952).