Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

М. А. ГОЛЬДМАН и С. Н. КРАЧКОВСКИЙ

О НУЛЬ-ЭЛЕМЕНТАХ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ЕГО ОБЛАСТИ ФРЕДГОЛЬМА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 VII 1952)

Пусть A — линейный (т. е. дистрибутивный и ограниченный) оператор, определенный на комплексном пространстве R типа B и отображающий R в себя. Будем рассматривать оператор $T_\lambda = E - \lambda A$, где E — тождественный оператор, а λ — комплексное число. Следуя С. М. Никольскому ([1], стр. 154), назовем областью Фредгольма Φ_A оператора A ту часть комплексной плоскости λ, в которой T_λ регулярен. Это означает, что Φ_A состоит из тех значений λ, при которых оператор T_λ нормально разрешим, а решения уравнений $T_\lambda x = 0$ и $T_\lambda^* X = 0$, где T_λ^* — оператор, сопряженный с T_λ, образуют конечномерные пространства одного и того же числа измерений. Согласно критерию регулярности ([1], стр. 149) Φ_A есть множество тех и только тех значений λ, для которых T_λ может быть представлен в виде

$$T_\lambda = U + V, \tag{1}$$

где U и V — соответственно, обратимый оператор, областью значений которого является все R, и вполне непрерывный оператор. В статье [1], стр. 154, доказывается, что Φ_A есть открытое множество и, следовательно, является суммой конечного или счетного числа попарно непересекающихся связных областей — компонент. При этом выясняется, что собственные значения оператора A либо сплошь заполняют компоненту, либо образуют в ней дискретное множество.

В настоящей заметке изучается область Фредгольма линейного оператора A в связи с его нуль-элементами ([2], стр. 189). В случае, когда A вполне непрерывный оператор, областью Фредгольма является вся комплексная плоскость λ и, как показал Ф. Рисс ([2], стр. 184), каждому значению λ отвечает лишь конечное число линейно независимых нуль-элементов. Естественно возникает вопрос о числе линейно независимых нуль-элементов в случае, когда оператор A не является вполне непрерывным. Нижеследующие теоремы постепенно приводят к решению этого вопроса для значений λ из области Фредгольма. Отметим, что применяемый нами метод дает приведенный выше результат С. М. Никольского о строении спектра линейного оператора в его области Фредгольма.

Теорема 1. *Для того чтобы числу λ из области Φ_A отвечало конечное число линейно независимых нуль-элементов оператора A, необходимо и достаточно, чтобы оператор T_λ мог быть представлен в виде* (1), *где U и V коммутируют* ($UV = VU$).

Доказательство. Пусть оператор A имеет конечное число нуль-элементов, отвечающих значению λ из Φ_A. Тогда остается в силе теорема Ф. Рисса ([2], стр. 190—191) (доказанная им для случая, когда A вполне непрерывен) о представлении оператора A в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где A_1 и A_2 ортогональны $(A_1A_2 = A_2A_1 = 0)$, причем A_1 — конечномерный оператор, а A_2 — такой оператор, что $E - \lambda A_2$ обратим и имеет областью значений все пространство R. Требуемое представление оператора T_λ получится, если положить $U = E - \lambda A_2$, $V = -\lambda A_1$.

Пусть теперь указанное в теореме представление (1) оператора T_λ имеет место. Требуется доказать, что значению $\lambda \in \Phi_A$ отвечает конечное число нуль-элементов оператора A. Допустим противное. Тогда, обозначив через L_n пространство решений уравнения $T_\lambda^n x = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, можем, используя лемму Ф. Рисса ([2], стр. 179), построить последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, обладающую следующими свойствами: $x_n \in L_{n+1}$, $\|x_n\| = 1$, $\|x - x_n\| \geqslant 1/2$ для всех x из L_n. Это приводит к противоречию, потому что, с одной стороны, последовательность $y_n = Vx_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ компактна, а с другой стороны, как в этом можно убедиться, имеет место соотношение $\|y_n - y_m\| \geqslant \frac{1}{2\|U^{-1}\|}$ $(m \neq n)$. Этим теорема доказана.

Пусть G обозначает какую-нибудь компоненту области Φ_A, содержащую, по крайней мере, одно значение λ, которому отвечает конечное число линейно независимых нуль-элементов.

Теорема 2. *Множество G_1 тех значений λ из G, которым отвечает конечное число линейно независимых нуль-элементов, открыто.*

Доказательство. Возьмем произвольное значение λ_0 из G_1. Тогда, на основании предыдущей теоремы, будем иметь $T_{\lambda_0} = E - \lambda_0 A = U + V$, где $UV = VU$. Следовательно, для оператора T_λ получим представление $T_\lambda = U_1 + V$, где $U_1 = U + (\lambda_0 - \lambda) A$. При этом операторы U_1 и V, очевидно, коммутируют, а при λ, достаточно близком к λ_0, оператор U_1 обратим и имеет областью значений все пространство R. Отсюда, снова имея в виду теорему 1, заключаем, что $\lambda \in G_1$, т.е. что G_1 — открытое множество.

Теорема 3. *Собственные значения оператора A, принадлежащие множеству G_1, суть изолированные точки.*

Доказательство. Предположим, что высказанная теорема неверна, т. е. что в G_1 существует собственное значение λ_0, предельное для последовательности собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ При этом условимся писать каждое собственное значение λ_n столько раз, сколько линейно независимых собственных элементов ему отвечает. Тогда все линейно независимые собственные элементы, отвечающие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, можно расположить в последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ так, что x_n будет собственным элементом для числа λ_n. Обозначим через L_n пространство элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для каждого n найдется элемент y_n, обладающий следующими свойствами: $y_n \in L_n$, $\|y_n\| = 1$, $\|y_n - y\| > 1/2$ для всех y из L_{n-1}. Так как собственному значению λ_0 отвечает конечное число линейно независимых нуль-элементов, то, в силу теоремы 1, будем иметь $T_{\lambda_0} = U + V$, где $UV = VU$. Рассматривая последовательность Vy_1, $Vy_2, \ldots$, можно убедиться, что существует подпоследовательность $Vy_{n_1}, Vy_{n_2}, \ldots$ такая, что $\|Vy_{n_p} - Vy_{n_q}\| > \frac{1}{2\|U^{-1}\|}$ $(p \neq q)$. Последние неравенства показывают, что последовательность $Vy_1, Vy_2, \ldots$ не является компактной, в противоречие полной непрерывности оператора V. Этим и завершается доказательство теоремы.

Теорема 4. *Если собственному значению λ_0 из Φ_A соответствует бесконечное число линейно независимых нуль-элементов,* *то существует окрестность точки λ_0, состоящая только из собственных значений оператора A.*

Доказательство. Требуется доказать, что уравнение

$$x - \lambda A x = 0 \tag{2}$$

имеет ненулевое решение для каждого значения λ, достаточно близкого к λ_0. Будем искать решения уравнения (2) в виде ряда

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{\nu} x_{\nu}, \tag{3}$$

где $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — элементы, которые должны быть определены. Перепишем уравнение (2) в виде $x - \lambda_0 A x = (\lambda - \lambda_0) A x$ и подберем элементы $x_0, x_1, x_2, \ldots$ так, чтобы ряд (3) формально удовлетворял этому уравнению. Производя подстановку, получим:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{\nu} (x_{\nu} - \lambda_0 A x_{\nu}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{\nu+1} A x_{\nu},$$

откуда, приравнивая элементы при одинаковых степенях $\lambda - \lambda_0$, будем иметь для определения $x_0, x_1, x_2, \ldots$ следующие соотношения:

$$T_{\lambda_0} x_0 = 0, \quad T_{\lambda_0} x_{\nu} = A x_{\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Эти соотношения оказываются разрешимыми, причем в качестве x_0 мы берем любой собственный элемент оператора A, отвечающий собственному значению λ_0. Имея в виду замкнутость области значений оператора T_{λ_0}, можно подобрать положительное число N так, чтобы для остальных элементов $x_1, x_2, \ldots$ выполнялись неравенства

$$\| x_{\nu} \| < N^{\nu} \| A \|^{\nu} \| x_0 \| \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Эти неравенства показывают, что ряд (3) сходится, если $|\lambda - \lambda_0| < (N \| A \|)^{-1}$. Отсюда вытекает, что в достаточно малой окрестности точки λ_0 уравнение (2) имеет ненулевое решение, выражаемое рядом (3).

Теорема 5. *Множества G_1 и G совпадают.*

Доказательство. Из теорем 3 и 4 следует, что множество G_1 замкнуто в G. Так как оно, кроме того, открыто (теорема 2), то, в силу связности G, заключаем, что $G_1 = G$.

На основании изложенного приходим к выводу, что каждая компонента области Φ_A содержит либо только те значения λ, которым отвечает конечное число линейно независимых нуль-элементов, либо только те, которым отвечает бесконечное их число. При этом собственные значения в каждой компоненте первого типа образуют дискретное множество, тогда как компоненты второго типа сплошь состоят из собственных значений.

Поступило
1 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, 7, № 3 (1943). [2] Ф. Рисс, Усп. матем. наук, в. 1 (1936).