Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. В. ГЕРАСИМЕНКО (КУЗНЕЦОВА)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ — КОВАЛЕВСКОЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ОБЛАСТИ СКОЛЬ УГОДНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 VII 1952)

§ 1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных вида:

$$\frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} + a_1 \frac{\partial^{p+q} u}{\partial t^p \partial x^q} + a_2 \frac{\partial^{2q} u}{\partial x^{2q}} = f(t, x), \tag{1}$$

где a_1, a_2 — постоянные.

Будем решать для уравнения (1) задачу Коши — Ковалевской (1) в следующей постановке:

а) Какие необходимые и достаточные условия следует наложить на функцию $f(t, x)$* и начальные данные:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1, \tag{2}$$

для того, чтобы существовало единственное аналитическое по переменному t решение в окрестности $t = 0$?

б) Если такое решение существует, то какова будет его природа относительно второй переменной x?

Задача Коши — Ковалевской в такой постановке в области бесконечно дифференцируемых функций для широкого класса уравнений с частными производными была решена Г. С. Салеховым (2).

Ряд интересных результатов в этой области получен также В. Р. Фридлендером (3) и Т. А. Кокаревой (4).

Для решения поставленной задачи уравнение (1) сведем к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^p u_1}{\partial t^p} - \alpha_1 \frac{\partial^q u_1}{\partial x^q} = f(t, x), \qquad (\mathrm{I}) \\ &\frac{\partial^p u}{\partial t^p} - \alpha_2 \frac{\partial^q u}{\partial x^q} = u_2(t, x), \qquad (\mathrm{II}) \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

где α_1, α_2 являются корнями квадратного уравнения:

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Займемся решением задачи Коши — Ковалевской в указанной постановке для системы уравнений (А).

---

* Для уравнений (1) и (12) функция $f(t, x)$ по самой постановке задачи предполагается аналитической по t в области существования решения.

Легко убедиться, что для уравнения (А I) справедлива следующая теорема:

Теорема 1*. *Необходимым и достаточным условием существования единственного аналитического по t решения уравнения* (А I) *является выполнение следующего ограничения*:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{n-i}\psi_{(i-1)p+k}^{(n-i)q}(x) + \alpha_1^n \overline{\varphi}_k^{(nq)}(x)\right| \leqslant M\frac{(n\beta+k)!}{R^{n\beta+k}}, \tag{3}$$

где $\beta \leqslant p$; $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$,

$$\overline{\varphi}_k(x) = \varphi_{p+k}(x) - \alpha_2\varphi_k^{(q)}(x); \quad \psi_n(x) = \left.\frac{\partial^n f(t, x)}{\partial t^n}\right|_{t=0}.$$

При этом:

1°. *Если неравенство* (3) *выполняется для* $\beta = p$, *то решение уравнения* (А I) *представляет аналитическую функцию* t *с радиусом сходимости* $\rho \neq 0$.

2°. *В случае, когда ограничение* (3) *выполняется для* $\beta < p$, *решение уравнения* (А I) *есть целая функция относительно* t.

Для уравнения (I) системы (А) справедлива также теорема:

Теорема 2. *Решение уравнения* (А I), *аналитическое по переменному* t *в области* $D(|t| < \rho,\ a \leqslant x \leqslant b)$, *относительно второй переменной* x *будет принадлежать к классу функций* $\alpha \leqslant \delta$ *в некоторой замкнутой области* $D'(|t| \leqslant r < \rho,\ a \leqslant x \leqslant b)$.

Решение уравнения (А I), удовлетворяющее начальным данным:

$$\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_{p+k}(x) - \alpha_2\varphi_k^{(q)} = \overline{\varphi}_k(x), \tag{4}$$

запишется в виде следующего степенного ряда:

$$u_1(t, x) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{np+k}}{(np+k)!}\left[\alpha_1^n\overline{\varphi}_k^{(nq)}(x) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_1^{n-i}\psi_{(i-1)p+k}^{(n-i)q}(x)\right]. \tag{5}$$

Перейдем к решению уравнения (II) системы (А) с начальными данными:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

Приведя начальные данные к нулю, будем решать задачу Коши—Ковалевской в вышеуказанной постановке для уравнения:

$$\frac{\partial^p z}{\partial t^p} - \alpha_2\frac{\partial^q z}{\partial x^q} = \Phi(t, x), \tag{6}$$

где

$$\Phi(t, x) = u_1(t_1, x) + \alpha_2\sum_{k=0}^{p-1}\frac{t^k}{k!}\varphi_k^{(q)}(x),$$

с нулевыми начальными данными.

Решение уравнения (6), удовлетворяющее нулевым начальным данным, можно представить в виде следующего интеграла:

$$z(t, x) = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_2^{n-1}\frac{(t-\xi)^{np-1}}{(np-1)!}\,\frac{\partial^{(n-1)q}\Phi(\xi, x)}{\partial x^{(n-1)q}}\,d\xi. \tag{7}$$

---

* Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием существования единственного аналитического по* t *решения уравнения* (1) *является выполнение следующего ограничения:*

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_1^{n-(i+1)} \alpha_2^{i} \overline{\varphi}^{(n-1)q}(x) + \alpha_2^{n} \varphi_k^{(nq)}(x) + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \alpha_2^{n-1-\lambda} \sum_{i=1}^{\lambda} \alpha_1^{\lambda-i} \psi_{(i-1)p+k}^{(\lambda-i)q+(n-1-\lambda)q}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \frac{(n\beta+k)!}{R^{n\beta+k}}, \tag{8}$$

где $\beta \leqslant p$; $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$; $\psi_n(x) = \left. \dfrac{\partial^n f(t, x)}{\partial t^n} \right|_{t=0}$.

Также:

1°. *Если ограничение* (8) *выполняется для* $\beta = p$, *решение уравнения* (1) *будет представлять аналитическую по* t *функцию с радиусом сходимости* ρ.

2°. *В случае, когда необходимые и достаточные условия, выраженные ограничением* (8), *выполняются для* $\beta < p$, *решение* $u(t, x)$ *представляет целую функцию относительно* t.

Доказательство необходимости проводится следующим образом. Предполагая решение уравнения (6) аналитическим по t, а затем дифференцируя по t решение, представленное в интегральной форме, и оценивая по модулю, получим ряд соотношений, которые дают нам необходимое условие, выраженное ограничением (8).

Решение уравнения (1) запишется в виде следующего степенного ряда:

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{np+k}}{(np+k)!} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_1^{n-(i+1)} \alpha_2^{i} \overline{\varphi}_k^{(n-1)q}(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \alpha_2^{n-1-\lambda} \sum_{i=1}^{\lambda} \alpha_1^{\lambda-i} \psi_{(i-1)p+k}^{(\lambda-i)q+(n-1-\lambda)q}(x) \right]. \tag{9}$$

Для доказательства достаточности условия (8) нужно удостовериться, что степенной ряд (9), представляющий решение уравнения (1), имеет радиус сходимости, отличный от нуля, что очевидно, ибо мажорантный ряд

$$|u(t, x)| \leqslant M \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^{np+k}}{(np+k)!} \frac{(n\beta+k)!}{R^{n\beta+k}} \tag{10}$$

сходится при условии $\beta \leqslant p$.

Также непосредственно убеждаемся, что:

1°. Если (8) выполняется для $\beta = p$, степенной ряд (9) имеет радиус сходимости $\rho = R$.

2°. Когда $\beta < p$, радиус сходимости $\rho = \infty$.

Наряду с вышеуказанным необходимым и достаточным условием существования аналитического по t решения уравнения (1), можно показать, например, что достаточным условием является принадлежность начальных данных (2) и функции $f(t, x)$ к классу функций $\alpha \leqslant \delta$ в смысле Жеврея [3], где δ, следуя Г. С. Салехову [2], будем называть весом уравнения (1).

в) Относительно переменной x решение уравнения (1) в некоторой замкнутой области D' ($|t| \leqslant r < \rho$, $a \leqslant x \leqslant b$) будет функцией класса $\alpha \leqslant \delta$, где $\delta = p / q$.

Аналогичные теоремы можно доказать также для более общего уравнения

$$\frac{\partial^{np} u}{\partial t^{np}} + a_1 \frac{\partial^{(n-1)p+q} u}{\partial t^{(n-1)p}\, \partial x^q} + \ldots + a_n \frac{\partial^{nq} u}{\partial x^{nq}} = f(t,\ x). \tag{11}$$

§ 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} - \frac{\partial u}{\partial x} = f(t,\ x). \tag{12}$$

При выполнении начальных условий

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=\chi(x)} = \varphi_k(x), \tag{13}$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$; $\chi(x)$ — однозначная функция на $[a,\ b]$ и на этом отрезке является функцией класса $\beta \leqslant p$, справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение* (12) *имело единственное аналитическое решение по переменному t, удовлетворяющее начальным условиям* (13), *заданным на кривой $t = \chi(x)$, достаточно, чтобы начальные данные* (13) *и функция $f(t,\ x)$ относительно x на отрезке $(a,\ b)$ принадлежали к классу функций $\beta \leqslant p$.*

Решение задачи Коши — Ковалевской для уравнения (12) сводится к решению интегро-дифференциального уравнения:

$$z(t_1,\ x_1) = \int\limits_0^{t_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_1-\xi)^{np-1}}{(np-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_1^{n-1}} \left[c(x_1) \frac{\partial z}{\partial \xi} + f_1(\xi,\ x) \right] d\xi. \tag{14}$$

Последнее решается методом последовательных приближений.

Теорема 5. *Решение уравнения* (12), *аналитическое по t в области $D\,(|t| < \rho,\ a \leqslant x \leqslant b)$ относительно второй переменной x, будет принадлежать к классу функций $\beta \leqslant p$.*

Как следствие из вышеуказанных теорем следуют результаты Жеврея ([3]) и Хольмгрена ([6]), полученные ими в связи с разрешением проблемы продолжаемости решения уравнения теплопроводности.

Казанский сельскохозяйственный институт
им. М. Горького

Поступило
20 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Ковалевская, К теории дифференциальных уравнений в частных производных, Научные работы, 1-й раздел, 1948. [2] Г. С. Салехов, Усп. матем. наук, 2, в. 2 (1947). [3] M. Gevrey, Ann. Ec. Norm., 35, sér. 3, 129 (1918). [4] В. Р. Фридлендер, ДАН, 76, № 3 (1951). [5] Т. А. Кокарева, ДАН, 79, № 1 (1951). [6] Holmgren, Ark. för Math. Astr. och Fys., 4, H. 1—2, 3—4 (1904—1908).