Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

М. ГАГУА

К ВОПРОСУ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 28 VI 1952)

В работах [1, 2] рассматривается вопрос наилучшего приближения гармонических функций гармоническими полиномами. В настоящей заметке дается обобщение этих результатов для решения некоторых дифференциальных уравнений эллиптического типа.

§ 1. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0, \qquad (E_0)$$

где Δ — оператор Лапласа, а $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $c(x, y)$ — заданные целые действительные функции относительно действительных аргументов x и y. Пусть T с границей L — некоторая односвязная конечная область. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $0 \in T$. Как известно [3], все действительные регулярные решения уравнения (E_0) в области T даются формулой:

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left[G(z, 0, z, \overline{z})\Phi_0(z) - \int_0^z \Phi_0(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t, 0, z, \overline{z})\,dt\right], \qquad (1)$$

где $z = x + iy \in T$, $\overline{z} = x - iy$, $G(t, \tau, z, \zeta)$ — функция Римана уравнения (E_0), являющаяся в нашем случае целой функцией относительно комплексных аргументов t, τ, z и ζ, а $\Phi_0(z)$ — произвольная аналитическая функция в T.

Рассмотрим систему $u_0, u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n, \ldots$ частных решений уравнения (E_0):

$$\begin{gathered} u_0(x, y) = G(0, 0, z, \overline{z}), \\ u_k(x, y) = \mathrm{Re}\left[G(z, 0, z, \overline{z})z^k - \int_0^z t^k \frac{\partial}{\partial t}G(t, 0, z, \overline{z})\,dt\right], \\ v_k(x, y) = \mathrm{Im}\left[G(z, 0, z, \overline{z})z^k - \int_0^z t^k \frac{\partial}{\partial t}G(t, 0, z, \overline{z})\,dt\right], \\ k = 1, 2, \ldots, \quad z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy. \end{gathered} \qquad (2)$$

Частные решения (2) образуют линейно независимую систему функций, в случае уравнения $\Delta u = 0$ превращаются в гармонические полиномы, а в некоторых других частных случаях явно выражаются через специальные функции [3].

Множество решений

$$\left\{w_n(x, y) = a_0 u(x, y) + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x, y) + b_i v_i(x, y)\right\},$$

где a_0, a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные действительные постоянные, при фиксированном n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ обозначим через $\mathfrak{M}_n$. Пусть $u(x, y)$ — произвольное регулярное решение уравнения (E_0) в области T, тогда величину

$$E_n(u, T) = \inf_{w_n \in \mathfrak{M}_n} \{ \sup_{(x, y) \in \overline{T}} |u(x, y) - w_n(x, y)| \},$$

как обычно, будем называть наилучшим приближением n-го порядка функции $u(x, y)$ в области $\overline{T}$.

И. Н. Векуа принадлежит следующая теорема*:

Теорема 1. *Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (E_0) в области T, граничное значение которой имеет k-ю $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ производную по дуге s, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Пусть граница L области T аналитическая кривая. Тогда*

$$E_n(u, T) \leqslant M n^{-k-\alpha},$$

где M — постоянная.

В самом деле, аналитическая функция $\Phi_0(z)$, соответствующая решению $u(x, y)$ по формуле (1), удовлетворяет на границе L тем же условиям, что и функция $u(x, y)$ [3]. Следовательно, справедливость теоремы непосредственно вытекает из соответствующей теоремы теории функции [4].

Пусть

$$\operatorname{Im} G(z, 0, z, \overline{z}) \equiv 0, \quad z \in T, \tag{3}$$

что, например, всегда выполняется для уравнения $\Delta u + c(x, y) u = 0$. Тогда для области, ограниченной достаточно гладкой кривой, имеем:

Теорема 2. *Пусть для некоторой функции $u(x, y)$, определенной в области T, имеем:*

$$E_n(u, T) \leqslant M n^{-k-\alpha},$$

где M, k и α — положительные постоянные, причем k — целое число, а $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (E_0) в области T; ее граничное значение существует и имеет k-ю производную по дуге s, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем α, если $0 < \alpha < 1$, а в случае $\alpha = 1$ неравенству

$$|u^{(k)}(s_1) - u^{(k)}(s_2)| \leqslant \text{const} \cdot |s_1 - s_2| |\lg |s_1 - s_2||. \tag{4}$$

Не ограничивая общности, можем предполагать, что задача Дирихле для уравнения (E_0) в данной области T разрешима.

Пусть $w_n(x, y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — последовательность частных решений, удовлетворяющих, соответственно, условиям:

$$|u(x, y) - w_n(x, y)| \leqslant M n^{-k-\alpha}. \tag{5}$$

Отсюда непосредственно заключаем, что $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (E_0) в области T и что существует ее граничное значение $u(s)$.

---

* Эта теорема с доказательством, указанным в тексте, была приведена Н. И. Векуа в одном из его докладов в Тбилисском математическом институте им. А. М. Размадзе.

Пусть, далее, $v_n(x, y) = u(x, y) - w_n(x, y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Очевидно, аналитическая функция $\Phi_n(z)$, соответствующая по формуле (1) функции $v_n(x, y)$, имеет вид $\Phi_n(z) = \Phi_0(z) - P_n(z)$, $z = x + iy \in T$, где $\Phi_0(z)$ — аналитическая функция, соответствующая $u(x, y)$, а $P_n(z)$ — полином n-го порядка, соответствующий $w_n(x, y)$. Так как $v_n(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{T}$, то, как известно ([3]), имеем

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\mu_n(t)\, dt}{G(t, 0, t, \overline{t})(t - z)}, \quad z = x + iy \in T, \tag{6}$$

где $\mu_n(t)$ является единственным действительным решением интегрального уравнения типа Фредгольма, правой частью которого является граничное значение функции $v_n(x, y)$. Отсюда непосредственной оценкой $\mu_n(t)$, учитывая (5), получаем

$$|\mu_n(t)| \leqslant M_1 n^{-k-\alpha}, \quad t \in L, \tag{7}$$

где M_1 — постоянная. Теперь на основании (3) и (7) легко установить неравенство

$$|\operatorname{Re}\Phi_0(z) - \operatorname{Re}P_n(z)| \leqslant M_2 n^{-k-\alpha},$$

что и доказывает теорему, так как, как известно ([1]), в этом случае аналитическая функция $\Phi_0(z)$ в замкнутой области $\overline{T}$ имеет k-ю производную, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем α, если $0 < \alpha < 1$, и удовлетворяет неравенству (4), если $\alpha = 1$.

Также легко, учитывая результаты ([2]), при соблюдении условия (3) доказывается:

Теорема 3. *Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (E_0) в области T. Для того чтобы существовало граничное значение функции $u(x, y)$, удовлетворяющее на границе L неравенству*

$$|u(s + h) + u(s - h) - 2u(s)| \leqslant \text{const} \cdot h$$

(s — дуговая абсцисса), необходимо и достаточно выполнение условия

$$E_n(u, T) \leqslant \text{const} \cdot h^{-1}.$$

Модифицируя очевидным образом доказательство одной известной теоремы С. Н. Бернштейна ([5]), получим:

Теорема 4. *Каковы бы ни были числа*

$$A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots, \quad \lim_{n \to \infty} A_n = 0,$$

и какова бы ни была область T с границей L, всегда найдется такое регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (E_0) в области T, что будем иметь $E_n(u, T) = A_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Эта теорема С. Н. Бернштейна дает возможность обычным путем установить, что оценки, данные в приведенных выше предложениях, являются в определенном смысле наилучшими.

§ 2. Обозначим через L_ρ $(\rho > 1)$ внешнюю линию уровня области T, а через T_ρ — конечную область, ограниченную кривой L_ρ.

Рассуждая так же, как при доказательстве теорем 1 и 2, получаем:

Теорема 5. *Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (E_0) в области T_ρ, граничное значение которого имеет k-ю производную $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$; тогда в $\overline{T}$ имеем*

$$E_n(u, T) \leqslant M n^{-k-\alpha} \rho^{-n},$$

где M — постоянная.

Теорема 6. *Пусть $u(x, y)$ — некоторая функция, определенная в T и удовлетворяющая условию*

$$E_n(u, T) \leqslant M n^{-k-\alpha-1} \rho^{-n},$$

где M, ρ, k и α — положительные постоянные, причем $\rho > 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$, а k — целое число. Тогда $u(x, y)$ можно продолжить в замкнутую область $\overline{T}_\rho$ таким образом, чтобы: а) *в T_ρ* $E_0(u) = 0$; б) *граничное значение $u(x, y)$ на L_ρ имело по дуге s k-ю производную, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем α, если $0 < \alpha < 1$, а в случае $\alpha = 1$ — неравенству* (4).

§ 3. Легко заметить, что в приведенных выше предложениях условие Гельдера соответствующим образом может быть заменено другими условиями (см., например, ([6])); в частности, при соблюдении условия (3) имеем:

Теорема 7. *Необходимое и достаточное условие того, чтобы граничное значение регулярного решения $u(x, y)$ по дуге s принадлежало классу Λ_∞ (см. ([6, 7])), заключается в следующем:*

$$E_n(u, T) \leqslant M_p [\lg n]^{-p}$$

для любого p ($p > 0$), где M_p — положительная функция, зависящая только от p.

Пусть теперь $f(s)$ — произвольная функция, заданная на границе области T и не удовлетворяющая по дуге s условию Гельдера. Тогда, на основании вышеприведенных предложений, легко заметить, что необходимое и достаточное условие принадлежности функции $f(s)$ относительно s классу Λ_∞ заключается в следующем:

$$\text{а) } \frac{1}{n^\alpha} = o(E_n(u, T)), \quad \text{б) } E_n(u, T) \leqslant M_p [\lg n]^{-p},$$

где $u(x, y)$ — гармоническая функция с граничным значением $f(s)$.

Построение функций, для которых выполняются одновременно а) и б), не представляет никакой трудности. Например, пусть $f(s)$ — граничное значение гармонической в T функции $u(x, y)$, удовлетворяющей равенствам:

$$E_n(u, T) = [\lg n]^{-\alpha_n}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

где α_n — произвольная числовая последовательность, для которой

$$1) \quad 0 < \alpha_n < \alpha_{n+1}; \quad 2) \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_n \lg \lg n}{\lg n} = 0$$

(существование функции $u(x, y)$ следует из теоремы 3). Легко проверить, что а) и б) выполняются. Аналогичные примеры, исходя из других соображений, построены также и в ([7]).

Наконец, заметим, что аналогичным путем можно рассмотреть и среднее степенное наилучшее приближение.

Поступило
12 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Walsch, W. E. Sewell, H. M. Elliott, Trans. Am. Math. Soc., 67, 381 (1949). [2] J. L. Walsch, H. M. Elliott, ibid., 68, 183 (1950). [3] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948. [4] W. S. Sewell, Degree of Approximation by Polynomials in the Complex Domain, Princeton Univ. Press, 1949. [5] С. Н. Бернштейн, С. R., 206, 1520 (1938). [6] М. Е. Гагуа, Сообщ. АН ГССР, 10, № 8 (1949). [7] Л. Магнарадзе, там же, 8, № 8 (1947).