Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 5

ТЕПЛОТЕХНИКА

О. А. КРЕМНЕВ

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПОЛЫХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПРИ ЗАДАННОМ ЗАКОНЕ ЕЕ ТЕПЛООБМЕНА С ОХЛАЖДАЮЩЕЙ ИЛИ НАГРЕВАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

(Представлено академиком М. В. Кирпичевым 16 VI 1952)

Изучение закономерностей и расчеты процесса теплообмена бесконечно большого полого тела с охлаждающей или нагревающей средой (через ограничивающую его круговую цилиндрическую поверхность) необходимы для решения многих эадач техники. В настоящем сообщении приводится решение дифференциальных уравнений такого процесса теплообмена и расчетные критериальные графики.

Дифференциальное уравнение теплопроводности и краевые условия процесса для однородных и изотропных бесконечных полых тел, ограниченных круговой цилиндрической поверхностью бесконечной длины, при отсутствии внутренних источников тепла и заданном законе теплообмена этой поверхности с охлаждающей или нагревающей средой имеют вид:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = a\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\vartheta}{\partial R}\right]; \tag{1}$$

$$\vartheta = 1 \quad \text{при } \tau = 0 \tag{2}$$

(начальное условие);

$$\vartheta = 1 \quad \text{при } R \to \infty, \ \tau > 0 \tag{3}$$

(условие неограниченности тела);

$$-\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial R} + \alpha\vartheta = 0 \quad \text{при } R = R_0 \tag{4}$$

(закон теплообмена с ограничивающей поверхностью),
где ϑ — относительная безразмерная температура любой точки тела, при охлаждении тела $\vartheta = \frac{t - t_с}{t_н - t_с}$, при нагревании $\vartheta = \frac{t_с - t}{t_с - t_н}$; t — температура любой точки тела; $t_н$ —начальная температура тела; $t_с$—температура охлаждающей или нагревающей среды; R — цилиндрическая координата любой точки тела (расстояние от оси его полости) в м; R_0 — координата ограничивающей цилиндрической поверхности в м; τ—время в час.; a — коэффициент температуропроводности тела в м²/час; λ — коэффициент теплопроводности тела в ккал/м·°С·час; α — коэффициент теплоотдачи от ограничивающей тело цилиндрической поверхности к охлаждающей среде или от нагревающей среды к ней в ккал/м²·°С·час.

По условию задачи $\partial\vartheta/\partial\theta = 0$, $\partial\vartheta/\partial z = 0$; θ, z — цилиндрические координаты.

Операционное преобразование дифференциального уравнения второго порядка в частных производных по R и τ и краевых условий (1)—(4) будет иметь вид

$$a\frac{d^2T}{dR^2}+a\frac{1}{R}\frac{dT}{dR}-sT+1=0; \tag{5}$$

$$T=\frac{1}{s}\quad \text{при } R\to\infty,\ \tau>0; \tag{6}$$

$$-\lambda\frac{dT}{dR}+\alpha T=0\quad \text{при } R=R_0, \tag{7}$$

где $T=f(R,\ s)$; s — оператор Лапласа.

Окончательное решение уравнения Бесселя с мнимым аргументом (5) при граничных условиях (6)—(7) для функции T, являющейся изображением функции ϑ, имеет вид:

$$T=\frac{1}{s}-\frac{K_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}R\right)}{s\left[K_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}R_0\right)+\frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\frac{s}{a}}K_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}R_0\right)\right]}, \tag{8}$$

где $K_0(x)$, $K_1(x)$ — бесселевы функции мнимого аргумента второго рода соответственно нулевого и первого порядка.

Решение для $\vartheta_{R,\tau}$ по решению для изображения может быть получено вычислением интеграла

$$\vartheta_{R,\tau}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}T_{R,s}e^{s\tau}ds, \tag{9}$$

$$\vartheta=1-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{K_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}R\right)}{s\left[K_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}R_0\right)+\frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\frac{s}{a}}K_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}R_0\right)\right]}e^{s\tau}ds. \tag{10}$$

Заменяя контур интегрирования в комплексной плоскости для подинтегральной функции второго члена равенства (10), производя ряд преобразований и замен бесселевых функций на основании известных реккурентных формул, получим следующие окончательные решения:

для безразмерной относительной температуры любой точки полого бесконечного тела, охлаждаемого или нагреваемого через круговую цилиндрическую поверхность бесконечной длины:

$$\vartheta=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{Y_0\left(x\frac{R}{R_0}\right)\left[J_0(x)+\frac{x}{\rho}J_1(x)\right]-J_0\left(x\frac{R}{R_0}\right)\left[Y_0(x)+\frac{x}{\rho}Y_1(x)\right]}{x\left[J_0(x)+\frac{x}{\rho}J_1(x)\right]^2+x\left[Y_0(x)+\frac{x}{\rho}J_1(x)\right]^2}e^{-x^2\varphi}dx; \tag{11}$$

для теплообмена между полым бесконечным телом и охлаждающей или нагревающей средой:

$$\text{Ки}_\tau=\frac{k_\tau R_0}{\lambda}\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-x^2\varphi}dx}{x\left[J_0(x)+\frac{x}{\rho}J_1(x)\right]^2+x\left[Y_0(x)+\frac{x}{\rho}Y_1(x)\right]}; \tag{12}$$

для относительной безразмерной температуры круговой цилиндрической поверхности теплообмена, ограничивающей полое бесконечное тело:

$$\vartheta_0 = \frac{4}{\pi^2 \rho} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2\varphi} dx}{x\left[J_0(x) + \frac{x}{\rho} J_1(x)\right]^2 + x\left[Y_0(x) + \frac{x}{\rho} Y_1(x)\right]^2}. \tag{13}$$

В уравнениях (11)—(13) $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ — бесселевы функции соответственно первого и второго рода от действительного аргумента, нулевого и первого порядка; x — переменная интегрирования; ρ и φ — известные критерии подобия нестационарных процессов теплопередачи Био и Фурье, равные:

$$\rho = \frac{\alpha R_0}{\lambda} \quad \text{(критерий граничных условий)};$$
$$\varphi = \frac{a\tau}{R_0^2} \quad \text{(критерий гомохронности)}. \tag{14}$$

Комплекс $\text{Ки}_\tau = \frac{k_\tau R_0}{\lambda}$, названный нами критерием Кирпичева, характеризует теплообмен при нестационарных процессах. Величина k_τ в этом комплексе является коэффициентом нестационарного теплообмена, измеряемым количеством тепла, отнесенным к единице времени и передаваемым в момент времени τ через единицу ограничивающей бесконечное полое тело поверхности при разности температур между охлаждающей или нагревающей средой и бесконечно удаленными слоями тела в 1°. k_τ зависит от ряда факторов (τ, λ, a, R_0, α) и является основной величиной для расчета теплообмена при охлаждении и нагревании бесконечного полого тела при указанных выше условиях. При одинаковых коэффициентах теплопроводности λ, температуропроводности a и теплоотдачи α k_τ не зависит от направления теплового потока.

В частном случае при $\rho \to \infty$, что соответствует граничному условию 1-го рода (постоянная температура ограничивающей поверхности), решения (11)—(12) упрощаются. В этом случае

$$\text{Ки}_\tau = \frac{4}{\pi^2} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2\varphi}}{xJ_0^2(x) + xY_0^2(x)}. \tag{15}$$

Решения Ки_τ и ϑ_0, наиболее важные для практических расчетов, номографированы. Значения Ки_τ и ϑ_0 в широких пределах изменения ρ и φ вычислены с точностью до 0,05% и приведены в виде критериальных графиков на рис. 1 и 2, которыми можно пользоваться для расчета температур поверхности теплообмена и самого теплообмена. При данных значениях τ, λ, a, R_0, α могут легко быть определены ρ и φ; по ним, пользуясь графиком рис. 1,—Ки_τ, и по Ки_τ — k_τ — коэффициент нестационарного теплообмена для момента времени τ и данных условий. Тогда при температурах бесконечно удаленных слоев тела и охлаждающей или нагревающей среды $t_н$, $t_с$ тепловой поток q с единицы поверхности теплообмена в расчетный момент времени τ определится как

$$q = k_\tau(\pm t_н \mp t_с) \text{ ккал / час} \cdot \text{м}^2. \tag{16}$$

Для расчета распределения температур по сечению бесконечного полого тела следует пользоваться зависимостью (11).

Аналитическая зависимость (12) может быть заменена более простыми расчетными формулами, достаточно точно приближающимися к ней в ограниченных пределах изменения критереив φ и ρ. В пределах $0 < \rho < \infty$ и $0 < \varphi < 10$ коэффициент нестационарного теплообмена с точностью до 5% может быть определен по формуле

$$k_\tau = \alpha \left[1 - \frac{\rho^2}{\rho_1} f\left(\rho_1 \sqrt{\varphi}\right) \right] \text{ ккал / м}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \cdot \text{час}, \tag{17}$$

где $\rho_1 = \rho + 0{,}375$, $f(\rho_1 \sqrt{\varphi}) = 1 - e^{\rho_1^2 \varphi} \operatorname{erf} c\,(\rho_1 \sqrt{\varphi})$. Для функции $\operatorname{erf} c\,(z)$ имеются подробные таблицы.

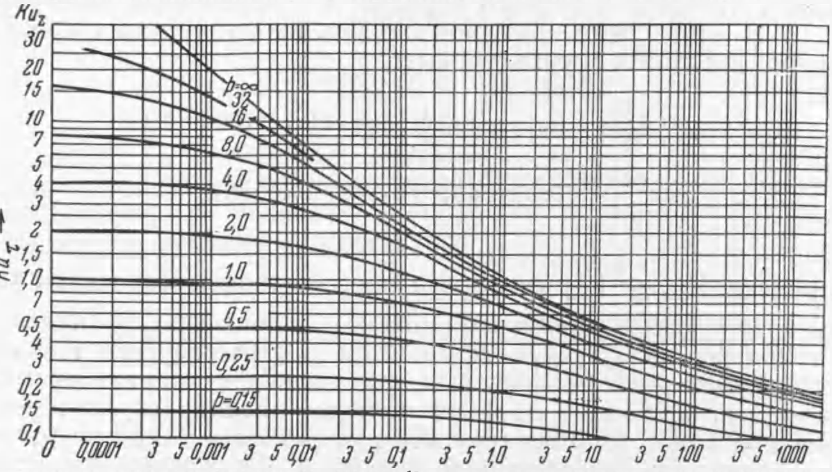

Рис. 1. $\text{Ки}_\tau = f(\varphi, \rho)$

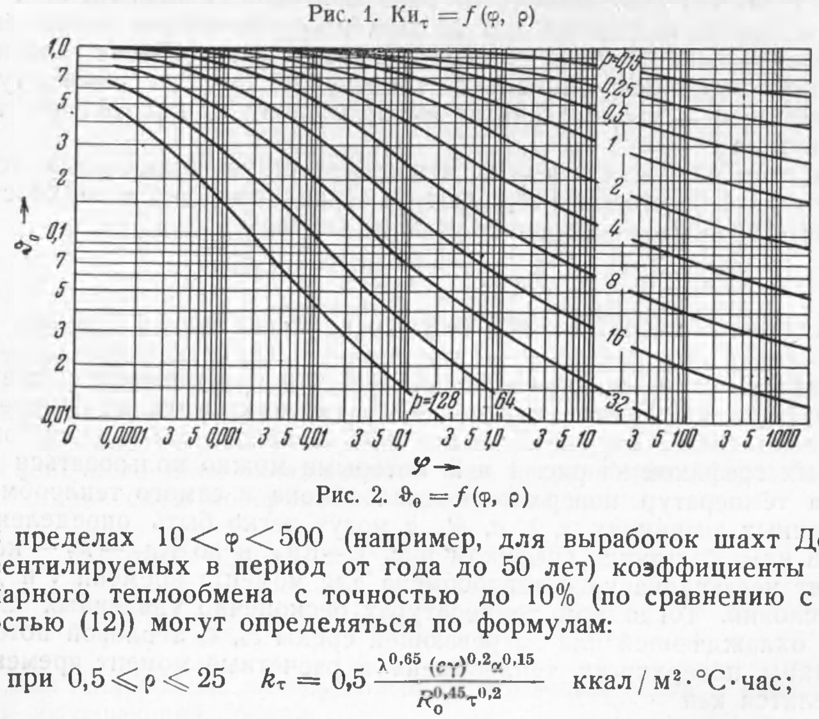

Рис. 2. $\vartheta_0 = f(\varphi, \rho)$

В пределах $10 < \varphi < 500$ (например, для выработок шахт Донбасса, вентилируемых в период от года до 50 лет) коэффициенты нестационарного теплообмена с точностью до 10% (по сравнению с зависимостью (12)) могут определяться по формулам:

$$\text{при } 0{,}5 \leqslant \rho \leqslant 25 \quad k_\tau = 0{,}5 \frac{\lambda^{0,65} (c\gamma)^{0,2} \alpha^{0,15}}{R_0^{0,45} \tau^{0,2}} \quad \text{ккал / м}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \cdot \text{час}; \tag{18}$$

$$\text{при } 25 < \rho \leqslant \infty \quad k_\tau = 0{,}8 \frac{\lambda^{0,79} (c\gamma)^{0,21}}{R_0^{0,58} \tau^{0,21}} \quad \text{ккал / м}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \cdot \text{час}. \tag{19}$$

Аналитические зависимости (11)—(19) могут найти применение при тепловых расчетах вентиляции шахт, метро, тоннелей, расчетах подземных тепловых сетей, местных прогревов полых тел и при решении ряда других задач.

Институт теплоэнергетики
Академии Наук УССР

Поступило
8 III 1951