Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. Я. БЕРЕЗИНА

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ О ДВУСТОРОННЕ РАССЛОЯЕМЫХ ПАРАХ КОНГРУЕНЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 VII 1952)

1. В предлагаемой заметке указываются четыре независимые алгебраические соотношения, которые имеют место для общей двусторонне расслояемой пары. Эти соотношения вместе с теоремой С. П. Финикова ([1]) достаточны для определения двусторонне расслояемой пары. Случай специальных симметричных пар ([1]) исключается.

2. Присоединим к каждому лучу r конгруенции общих перпендикуляров (r) триортогональный триэдр T с вершиной O и единичными векторами ребер $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ так, чтобы ребро $\mathbf{e}_3$ совпадало с лучом r; в остальном положение триэдра T произвольно при условии, что с каждым лучом r связан только один триэдр. Пусть соответствующие лучи r_1 и r_2 обеих конгруенций, образующих пару, пересекают луч r в точках N_1 и N_2 с абсциссами $h_i = ON_i$ $(i = 1, 2)$, образуя с осью $\mathbf{e}_1$ углы α_1 и α_2. Присоединим в точке N_i к лучу r_i вспомогательный триортогональный триэдр T_i $(N_i, \mathbf{e}_k^i)$ так, чтобы ребро $\mathbf{e}_3^i$ совпадало с лучом r_i, а ребро $\mathbf{e}_1^i$ — с общим перпендикуляром соответствующих лучей.

Компоненты движения триэдров T_i выражаются через компоненты движения триэдра T следующим образом ([2]):

$$\begin{gathered}\omega_1^i = (h_1 - h_2) H_i, \quad \omega_2^i = \Omega_i^* - h_i \Omega_{i3}^*, \quad \omega_3^i = \Omega_i - h_i \Omega_{i3}, \\ \omega_{12}^i = -\Omega_{i3}^*, \quad \omega_{13}^i = -\Omega_{i3}, \quad \omega_{23}^i = \sin(\alpha_1 - \alpha_2) A_i \quad (i = 1, 2),\end{gathered} \tag{1}$$

где ([1])

$$\begin{gathered}\Omega_i = \cos\alpha_i \omega_1 + \sin\alpha_i \omega_2, \quad \Omega_i^* = \sin\alpha_i \omega_1 - \cos\alpha_i \omega_2, \\ \Omega_{i3} = \cos\alpha_i \omega_{13} + \sin\alpha_i \omega_{23}, \quad \Omega_{i3} = \sin\alpha_i \omega_{13} - \cos\alpha_i \omega_{23}, \\ A_i = \frac{d\alpha_i + \omega_{12}}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad H_i = \frac{dh_i + \omega_3}{h_1 - h_2}.\end{gathered} \tag{2}$$

Для триэдров T_i имеет место

$$\omega_1^i = a_1^i \omega_{12}^i + a_2^i \omega_{23}^i, \quad \omega_2^i = b_1^i \omega_{13}^i + b_2^i \omega_{23}^i, \tag{3}$$

где (ср. ([2]))

$$\begin{gathered}a_1^i = m_i - \rho_i \frac{\sin 2\varphi_i}{\sin 2\beta_i}, \quad a_2^i = -\rho_i \frac{\cos 2\beta_i + \cos 2\varphi_i}{\sin 2\beta_i}, \\ b_1^i = \rho_i \frac{\cos 2\beta_i - \cos 2\varphi_i}{\sin 2\beta_i}, \quad b_2^i = m_i + \rho_i \frac{\sin 2\varphi_i}{\sin 2\beta_i}.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $2\rho_i$ — фокальное расстояние конгруенции (r_i); $2\beta_i$ — угол между фокальными плоскостями (r_i); m_i — расстояние от точки приложения основания общего перпендикуляра на r_i до центра луча r_i; φ_i — угол, который образует биссектриса фокальных плоскостей (r_i) с общим перпендикуляром соответствующих лучей.

Подставляя выражения (1) в систему (3), получаем:

$$A_i = \frac{\Omega_i^* - h_i\Omega_{i3}^* + b_1^i\Omega_{i3}}{b_2^i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \tag{5}$$

$$H_i = -\frac{a_1^i}{h_1 - h_2}\Omega_{i3} + \frac{a_2^i(\Omega_i^* - h_i\Omega_{i3}^* + b_1^i\Omega_{i3})}{(h_1 - h_2)\, b_2^i}. \tag{6}$$

3. Общие уравнения расслоения ([1]) содержат 5 независимых уравнений. Одно из них выражает теорему С. П. Финикова ([1]).

Подставляя выражения (5) и (6) в остальные 4 уравнения и сокращая на $[\Omega_{13}, \Omega_{23}] \neq 0$, получаем:

$$\begin{gathered}
\frac{m_1 + \rho_1 \dfrac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\beta_1}}{m_2 + \rho_2 \dfrac{\sin 2\varphi_2}{\sin 2\beta_2}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{(h_1 - h_2)} \frac{2\rho_1}{\sin 2\beta_1} \cos(\varphi_1 + \beta_1)\cos(\varphi_1 - \beta_1), \\
\frac{m_2 + \rho_2 \dfrac{\sin 2\varphi_2}{\sin 2\beta_2}}{m_1 + \rho_1 \dfrac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\beta_1}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{(h_1 - h_2)} \frac{2\rho_2}{\sin 2\beta_2} \cos(\varphi_2 + \beta_2)\cos(\varphi_2 - \beta_2), \\
\frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \beta_1)\operatorname{tg}(\varphi_1 - \beta_1)}{m_2^2 - \rho_2^2} = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{(h_1 - h_2)^2}, \\
\frac{\operatorname{tg}(\varphi_2 + \beta_2)\operatorname{tg}(\varphi_2 - \beta_2)}{m_1^2 - \rho_1^2} = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{(h_1 - h_2)^2}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Напоминаем, что здесь $\varphi_i + \beta_i$, $\varphi_i - \beta_i$ — углы, которые образуют фокальные плоскости r_i с общим перпендикуляром, а $m_i^2 - \rho_i^2 = (m_i + \rho_i)(m_i - \rho_i)$ — произведение расстояний фокусов луча r_i от точки приложения общего перпендикуляра.

Из системы (7) следует

$$\frac{2m_1}{\sin 2\varphi_1}\frac{2m_2}{\sin 2\varphi_2} = \frac{2\rho_1}{\sin 2\beta_1}\frac{2\rho_2}{\sin 2\beta_2}; \tag{8}$$

$$\frac{\sin(\varphi_1 + \beta_1)\sin(\varphi_1 - \beta_1)\sin(\varphi_2 + \beta_2)\sin(\varphi_2 - \beta_2)}{(m_1^2 - \rho_1^2)(m_2^2 - \rho_2^2)} = \frac{\dfrac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{(h_1 - h_2)^2}}{\dfrac{2\rho_1}{\sin 2\beta_1}\dfrac{2\rho_2}{\sin 2\beta_2}}; \tag{9}$$

$$\cos(\varphi_1 + \beta_1)\cos(\varphi_1 - \beta_1)\cos(\varphi_2 + \beta_2)\cos(\varphi_2 - \beta_2) = \frac{\dfrac{(h_1 - h_2)^2}{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\dfrac{2\rho_1}{\sin 2\beta_1}\dfrac{2\rho_2}{\sin 2\beta_2}}. \tag{10}$$

Проделав выкладки в обратном порядке, находим, что если для некоторой пары имеет место теорема С. П. Финикова и система (7), то пара двусторонне расслояема.

Поступило
8 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Матем. сборн., 12 (54), № 3 (1943). [2] Л. Я. Березина, Изв. АН Латв. ССР, № 8 (49) (1951).