Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. В. ХОХЛОВ

# ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛАГЕРРА

*(Представлено академиком В. А. Фоком 16 VI 1952)*

В ряде физических задач, например, при квантовомеханическом рассмотрении явления «светящегося» электрона, представляет интерес асимптотическое выражение присоединенных функций Лагерра $L_n^\nu(x)$, когда порядок $n$ и индекс $\nu$ велики, причем $x/n \ll 1$ и индекс $\nu$ близок к значению $2\sqrt{nx}$. При этих условиях асимптотические выражения присоединенных функций Лагерра через тригонометрические функции (квази-классическое приближение), вообще говоря, неприменимы.

Настоящая работа посвящена выводу асимптотического выражения $L_n^\nu(x)$, когда величина

$$t = \mu\left[\nu - 2\sqrt{(n+1)x} - x\right] \tag{1}$$

ограничена. Здесь $\mu$ — малый параметр, равный

$$\mu = x^{-1/6}(n+1)^{-1/}\left(1+\sqrt{\frac{x}{n+1}}\right)^{-2/3}. \tag{2}$$

Это асимптотическое выражение имеет вид:

$$L_n^\nu(x) = \sqrt{2}\,\mu n^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\nu}{2}} e^{\nu\sqrt{\frac{x}{n}}-\frac{x}{2}-n}\, v(t), \tag{3}$$

где $v(t)$ — функция Эйри. Точность выражения (3) определяется величиной поправочных членов, которые будут приведены ниже.

Из формулы (3), между прочим, видно, что при значениях $\nu$, соответствующих значениям $t=0$, присоединенная функция Лагерра обладает максимумом, в связи с которым этот интервал значений $\nu$ и представляет интерес в физических задачах.

В качестве исходного выражения для присоединенных функций Лагерра примем:

$$L_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\nu}{2}} e^x \int\limits_{\infty-i\pi}^{\infty+i\pi} e^{-(n+1)\ln\left(1-\sqrt{\frac{x}{n}}e^u\right)-\sqrt{xn}\,e^{-u}-\nu u}\, du. \tag{4}$$

При значениях $\nu$, соответствующих ограниченным $t$, главный участок интегрирования находится в окрестности

$$u_0 = \ln\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{x}}. \tag{5}$$

Разложение подэкспоненциального выражения в (4) около этой точки имеет вид:

$$\nu\sqrt{\frac{x}{n}} - \frac{3}{2}x + \frac{x^{3/2}}{3\sqrt{n+1}} - \frac{x\nu}{2n} + \left(2\sqrt{(n+1)x} + x - \nu\right)(u-u_0) +$$

$$+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{x}\right)^2\frac{(u-u_0)^3}{3} +$$

$$+x\left[1+\sqrt{\frac{x}{n+1}}\right]^2\frac{(u-u_0)^4}{4} + \sqrt{xp}\,\frac{(u-u_0)^5}{60}+\cdots \qquad (6)$$

Введением новой переменной

$$z = \frac{1}{\mu}(u_0 - u) \qquad (7)$$

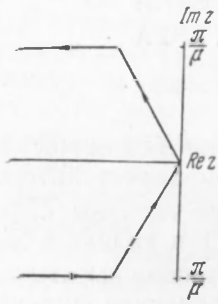


Рис. 1. Контур $C$

выражение (6) приводится к виду:

$$\nu\sqrt{\frac{x}{n}} - \frac{3}{2}x + tz - \frac{z^3}{3} +$$

$$+\left\{\frac{x^{3/2}}{3\sqrt{n+1}} - \frac{x\nu}{2n} + \mu\sqrt{\frac{x}{n+1}}\,\frac{z^4}{4} - \mu^2\frac{z^5}{60}\right\} + \cdots \qquad (8)$$

Члены, собранные в фигурных скобках, представляют поправки к основному подэкспоненциальному выражению. Формула принимает вид:

$$L_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\,\mu\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\nu}{2}} e^{\nu\sqrt{\frac{x}{n}}-\frac{x}{2}}\int\limits_C e^{tz-\frac{z^3}{3}}\left[1+\{\cdots\}\right]dz. \qquad (9)$$

Контур $C$ в этом выражении указан на рис. 1.

Ввиду того, что далекие от начала координат участки контура не играют заметной роли, контур $C$ можно заменить контуром, идущим из бесконечности по лучу $ze^{-i\frac{2}{3}\pi}$ до нуля и затем от нуля до бесконечности по лучу $ze^{i\frac{2}{3}\pi}$. При этом интеграл в (9) принимает вид:

$$\int e^{tz-\frac{z^3}{3}}\left[1+\{\cdots\}\right]dz = 2\sqrt{\pi}i\left\{v(t)\left[1+\frac{x^{3/2}}{3\sqrt{n+1}} - \frac{x\nu}{2n} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mu}{4}\sqrt{\frac{x}{n+1}}\,t^2 - \mu^2\frac{t}{15}+\cdots\right] + v'(t)\left[\frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{x}{n+1}} - \frac{\mu^2}{60}t^2+\cdots\right]\right\}. \qquad (10)$$

Отсюда видно, что формула (3) дает асимптотическое представление присоединенной функции Лагерра с той же степенью точности, с которой правую часть (10) можно заменить выражением $2\sqrt{\pi}iv(t)$ и гамма-функцию заменить ее асимптотическим выражением по формуле Стирлинга.

В заключение отметим, что наше асимптотическое выражение для присоединенной функции Лагерра по своей структуре аналогично асимптотическому выражению В. А. Фока для бесселевой функции [1].

Поступило
17 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, М., 1946.