

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Д. ВОЛКОВ

**РАЗРУШЕНИЕ ПУТЕМ ОТРЫВА ПРИ СЖАТИИ ХРУПКИХ  
КВАЗИ-ИЗОТРОПНЫХ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 13 VI 1952)

1. Энергию упругих деформаций в единице объема  $V_i$  кристалла (<sup>1</sup>)  
 $H_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \xi_k \gamma_k$  выразим через напряжения  $\xi_k$ . Для этого воспользуемся  
соотношениями обобщенного закона Гука  $\gamma_i = \sum_{k=1}^6 c_{ik} \xi_k$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ).  
Результат представим в каноническом виде:  $H_i = \sum_{k=1}^6 c_k \xi_k^2$ . Здесь  $\gamma_i$  — де-  
формации;  $c_{ik}$  — коэффициенты упругости;  $c_k$  — функции инвариан-  
тов преобразования тензора упругих постоянных.

Энергия поликристалла в объеме  $W$

$$H = \sum_{i=1}^N H_i. \quad (1)$$

Выражение (1) соответствует одному из основных предположений  
в теории упругости и пластичности сплошных сред, согласно которому  
энергия аддитивна.

Вероятность того, что  $\xi_k$  принадлежит ячейке  $dX$ :  $dX = \prod_{k=1}^{6N} d\xi_k$  фа-  
зового пространства напряжений, для систем с аддитивной энергией  
равна  $dP = e^{(\psi-H)/\theta} dX$ , где  $\psi$  — постоянная относительно  $\xi_k$  величина;  
 $\theta$  — модуль распределения. Из условия нормировки  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\psi-H)/\theta} dX = 1$   
находим

$$\psi = -\theta \ln z = N \left[ -3\theta \ln(\pi\theta) + \frac{1}{2} \theta \sum_{k=1}^6 \ln c_k \right], \quad (2)$$

где  $z$  — интеграл состояния.

Средняя энергия поликристалла  $\bar{H} = \int H e^{(\psi-H)/\theta} dX$  после преобразо-  
ваний равна: (3)

$$\bar{H} = \psi - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \text{ Подстановка (2) в (3) дает } \bar{H} = 3N\theta.$$

Обозначим среднюю энергию в единице объема  $W$  через  $\bar{H}_1$ ; тогда

$$\bar{H}_1 = \frac{\bar{H}}{N} = 3\theta. \quad (4)$$

Если внешняя по отношению к объему  $W$  нагрузка отсутствует, но имеются остаточные напряжения второго и третьего рода, то

$$\bar{H}_0 = 3\theta_0. \quad (5)$$

Средние напряжения от внешней нагрузки совершают работу в единице объема  $W$  поликристалла

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sigma_k e_k, \quad (6)$$

где  $\sigma_k, e_k$  — главные напряжения и деформации. Следовательно,

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_0 + A. \quad (7)$$

Из выражений (4), (5) и (7) находим зависимость модуля распределения напряжений в объемах  $V$  от внешней нагрузки:

$$\theta = \theta_0 + 1/3 A. \quad (8)$$

2. Положим:  $\sigma_2 = \alpha\sigma_1$ ;  $\sigma_3 = \beta\sigma_1$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ), где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные, характеризующие напряженное состояние. Найдем относительное отклонение напряжений от среднего  $\sigma_1$  в основной массе объемов  $V$ . Работу (6) представим в виде

$$A = C\sigma_1^2, \quad (9)$$

где

$$C = \frac{1}{2E} [1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\nu(\alpha + \alpha\beta + \beta)];$$

$$-1 \leq \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \beta \leq 1; \quad (10)$$

$E$  — модуль нормальной упругости;  $\nu$  — коэффициент поперечного сжатия. Из (8) и (9) следует, что модуль  $\theta$  при данном  $\sigma_1$  зависит от характера напряженного состояния. Найдем такие напряженные состояния, при которых  $\theta$  принимает экстремальные значения. Для этого достаточно найти экстремумы функции  $f(\alpha, \beta) = 2EC$  в интервале (10). Из равенств  $df/d\alpha = df/d\beta = 0$  находим:

$$\alpha = \beta = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (11)$$

Далее, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \end{vmatrix} = 4(1 - \nu^2) > 0$$

и  $\partial^2 f / \partial \alpha^2 = 2 > 0$ , то внутри интервала (10) имеется только минимум.

Относительное число объемов  $V$  с напряжениями в пределах от  $\sigma_1 - 2,6\omega$  до  $\sigma_1 + 2,6\omega$  составляет 99% от общего числа объемов  $V$ . Здесь  $\omega = \sqrt{\theta/2}$ . Положим  $\theta_0 = 0$  (исходное состояние поликристалла является „естественным“). Тогда из (11), (9) и (8):

$$\frac{2,6 \omega_m}{\sigma_1} = 0,324\%. \quad (12)$$

Максимум  $f(\alpha, \beta)$  находится на границе интервала (10):  $\alpha = \beta = -1$ . Соответственно этому

$$\frac{2,6 \omega_M}{\sigma_1} = 0,967\%. \quad (13)$$

Следовательно, функции распределения объемов  $V$  по напряжениям в однофазном квази-изотропном поликристалле, не имеющем остаточных напряжений, обладают острыми максимумами. Это обстоятельство является существенным при выводе условий пластичности из закона скальвающего напряжения для монокристаллов (1, 2).

3. Известно, что процесс микро-скопического разрушения в масштабе объемов  $V$  начинается при напряжениях, меньших предела прочности поликристалла (3-5). Рассмотрим случай одноосного сжатия:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\sigma_c < 0$ . На рис. 1 приведена кривая распределения объемов  $V$  по величине нормальных напряжений, действующих вдоль оси 1. На полу-оси, по которой компоненты нормальных напряжений в объемах  $V$  положительны, отложим сопротивление отрыву кристалла  $S_n$ . Заштрихованная площадь кривой распределения равна относительному числу  $q$  объемов  $V$ , в которых растягивающие напряжения превышают  $S_n$ , следовательно, имеют место микроскопические трещины. Аналогичная картина получается вдоль любой другой оси, перпендикулярной оси сжатия. Величина  $q$

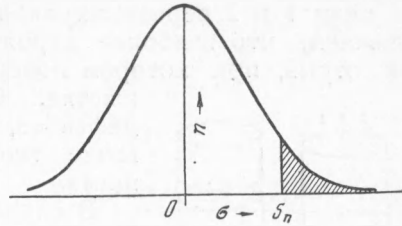


Рис. 1. Кривая распределения объемов  $V$  по величине нормального напряжения, средняя величина которого является главным напряжением, перпендикулярным оси сжатия.  $n$  — относительное число объемов  $V$ ,  $\sigma$  — нормальное напряжение в объемах  $V$

$$q = \frac{1}{2} - \frac{1}{V\pi} \int_0^y e^{-t^2} dt \quad (14)$$

зависит от верхнего предела интегрирования, который в данном случае равен:

$$y_1 = \frac{S_n}{V\theta} = \frac{S_n}{\sqrt{\theta_0 + \frac{\sigma_c^2}{bE}}} \quad (15)$$

С увеличением внешней нагрузки, характеризуемой параметром  $\sigma_c$ , величина (15) уменьшается, следовательно,  $q_1 = q(y_1)$  увеличивается.  $q_1$  увеличивается до некоторой, повидимому, постоянной для данного поликристалла критической величины, при достижении которой наступает макроскопическое разрушение.

Вдоль оси сжатия

$$y_3 = \frac{S_n + \sigma_c}{V\theta} = \frac{S_n + \sigma_c}{\sqrt{\theta_0 + \frac{\sigma_c^2}{bE}}} \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует  $y_3 \geq y_1$ . Поэтому  $q_1(y_1) \geq q_3(y_3)$ . Равенство  $q_1 = q_3 = q_0$  имеет место при отсутствии внешней нагрузки ( $\sigma_c = 0$ ). Величина  $q_0 > 0$  только при  $\theta_0 > 0$ . Это соответствует наличию трещин, „каверн“ и прочих дефектов реальных материалов. Такие дефекты привлекаются для объяснения хрупкого разрушения в теориях Гриффита, Менаже и др. (6, 7). Если  $\theta_0 = 0$ , то  $q_0 = 0$ ; в исходном материале дефекты отсутствуют. Однако, вследствие анизотропии механических свойств кристаллов в объемах  $V$ , при наложении внешней нагрузки,

согласно (8), (15) и (14),  $\theta > 0$  и  $q > 0$ . Трещины в объемах  $V$  появляются за счет возрастания  $\theta$ .

Принимая во внимание, что растягивающие напряжения по главным осям 1 и 2 перпендикулярны оси сжатия и  $q_1 > q_3$  при  $\sigma_c > 0$ , заключаем, что наиболее вероятным является такой макроскопический отрыв, при котором поверхность раздела проходит через ось сжатия. Отрыв нельзя объяснить наличием дефектов, когда  $\theta_0 = 0$ . Поэтому упомянутые выше теории не являются достаточно общими.

В случае двухосного равномерного сжатия ( $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{cc} < 0$ )

$$y'_1 = \frac{S_n}{V\theta}; \quad y'_2 = y'_3 = \frac{S_n + \sigma_{cc}}{V\theta}, \quad (17)$$

откуда  $y'_2 = y'_3 \geq y'_1$ ;  $q'_1 \geq q'_2 = q'_3$ . Отрыв по поверхности, перпендикулярной оси 1 (рис. 2), вследствие этого является наиболее вероятным. Таким образом вполне объясняется разрушение путем отрыва при двухосном равномерном сжатии в опытах Бриджмена (3).

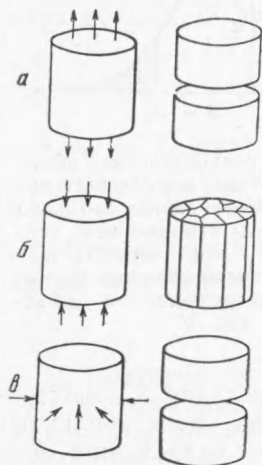


Рис. 2. Схематическое изображение макроскопического разрушения путем отрыва в результате действия растягивающих напряжений в объемах  $V$  при одноосном растяжении (а), одноосном сжатии (б) и двухосном равномерном сжатии (в)

4. Напряжение  $\sigma_c$  или  $\sigma_{cc}$  является средним и потому определяется из опыта обычными методами. Так например, при одноосном сжатии цилиндрического образца  $\sigma_c = P/F$ , где  $P$  — нагрузка;  $F$  — площадь поперечного сечения. Критическую величину  $\sigma_c$  или  $\sigma_{cc}$ , являющуюся пределом прочности, в случае разрушения путем отрыва естественно отождествить с техническим сопротивлением отрыву  $R_\sigma$  (2, 8), так как между этими величинами и пределом прочности в случае одноосного растяжения ( $\sigma_1 = \sigma_p > 0$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ )

$$y''_1 = \frac{S_n - \sigma_p}{V\theta}; \quad y''_2 = y''_3 = \frac{S_n}{V\theta} \quad (18)$$

нет принципиальной разницы.

Согласно (18):  $y''_2 = y''_3 \geq y''_1$ ;  $q''_1 \geq q''_2 = q''_3$ . Наиболее вероятным является отрыв по поверхности, перпендикулярной оси растяжения. Вследствие того, что  $y''_1 \geq y''_2$ , вероятность разрушения при растяжении, вообще говоря, больше, чем при сжатии.

Поступило  
28 II 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. Д. Волков, ДАН, 76, № 3, 371 (1951). <sup>2</sup> С. Д. Волков, ДАН, 79, № 2, 213 (1951). <sup>3</sup> Я. Б. Фридман, Механические свойства металлов, 1946. <sup>4</sup> В. А. Павлов и М. В. Якутович, ДАН, 77, № 1, 49 (1951). <sup>5</sup> В. А. Павлов, ДАН, 78, № 4, 677 (1951). <sup>6</sup> Н. Н. Давиденков, Динамические испытания металлов, 1936. <sup>7</sup> Н. Н. Давиденков, Сборн. Вопросы машиноведения, посвящ. 60-летию акад. Е. А. Чудакова, изд. АН СССР, 1950. <sup>8</sup> Г. В. Ужик, Сопротивление отрыву и прочность металлов, изд. АН СССР, 1950.