Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

Н. Н. МОИСЕЕВ

О КОЛЕБАНИЯХ ТЯЖЕЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ И НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 11 VI 1952)

1. Как известно, потенциал скоростей малых движений жидкости в сосуде $\varphi(x, y, z, t)$ является функцией, гармонической внутри области τ, ограниченной стенками сосуда и плоскостью $z=0$ свободной поверхности жидкости в положении равновесия, и удовлетворяющей граничным условиям:
на стенках:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}=0; \tag{1}$$

при $z=0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=-\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где g — ускорение силы тяжести.

Свободная поверхность определяется в этом случае условием:

$$\zeta(x, y, t,)=-\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t}. \tag{3}$$

2. Пусть $\{\varphi_i(x, y, z)\}$ — система функций, гармонических внутри τ удовлетворяющих условию (1) и образующих полную ортонормированную систему функций на плоской фигуре S, являющейся сечением полости сосуда плоскостью $z=0$.

Тогда потенциал φ можно искать в виде ряда:

$$\varphi=\sum_i f_i(t) \varphi^i. \tag{4}$$

Обозначая через a_{nm} коэффициенты Фурье в разложении при $z=0$ функции $\partial \varphi_n / \partial z$:

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}=\sum_m a_{nm} \varphi_m(x, y, 0) \tag{5}$$

и используя условия (2), получим для определения функций $f_n(t)$ следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$f_n''(t)+g \sum_m a_{nm} f_m(t)=0, \quad n, m=1,2, \ldots \tag{6}$$

3. Пусть теперь функции $\{\psi_n(x,y)\}$ образуют некоторую полную ортонормированную на S систему. Положим

$$\zeta(x, y, t) = \sum q_n(t)\,\psi_n(x, y). \tag{7}$$

Тогда потенциал φ можно выразить формулой:

$$\varphi(x, y, z, t) = \iint H(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\,\frac{\partial\varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial n}\,d\sigma, \tag{8}$$

где H — функция Грина задачи Неймана, а интеграл распространен на всю поверхность, ограничивающую объем τ.

В силу (1) и (7) выражение (8) принимает вид:

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_n q_n'(t)\,\overline{\psi}_n(x, y, z),$$

где

$$\overline{\psi}_n = \int_S H(x, y, z, \xi, \eta, 0)\,\psi_n(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Обозначая через b_{nm} коэффициенты Фурье в разложении

$$\overline{\psi}_n(x, y, 0) = \sum_m b_{nm}\psi_m(x, y), \tag{9}$$

получим из условия (3) следующую бесконечную систему уравнений для определения функций $q_n(t)$:

$$\sum_m b_{nm}q_m'' + gq_n = 0, \quad n, m = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

4. Собственными частотами главных колебаний будут корни характеристических уравнений (6) или (10), а для определения главных колебаний в общем случае нам надо разрешить одну из этих систем. Возникает вопрос: каким должен быть базис $\{\varphi_n\}$ или $\{\psi_n\}$, чтобы система (6) или (10) распадалась на отдельные уравнения? Как нетрудно видеть, таким базисом является нормированная система собственных функций интегрального уравнения:

$$\psi_n(x, y) = \lambda_n \int_S H(x, y, 0, \xi, \eta, 0)\,\psi_n(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{11}$$

так как в этом случае $b_{nm} = \delta_{nm}\dfrac{1}{\lambda_n}$, где δ_{nm} — символ Кронеккера, и система (10) приводится к виду

$$g_n'' + g\lambda_n q_n = 0. \tag{12}$$

Аналогично показывается, что $a_{nm} = \delta_{nm}\lambda_n$, т. е. функции $f_n(t)$ удовлетворяют той же системе дифференциальных уравнений (12).

5. Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

Т е о р е м а. *Квадрат собственных частот свободных колебаний жидкости в сосуде равен произведению*

$$\sigma_n^2 = g\lambda_n,$$

где λ_n — собственные числа интегрального уравнения (11), *а форма свободной поверхности, соответствующая главным колебаниям, определяется формулой*

$$\zeta_n = A_n \sin\left(\sqrt{g\lambda_n}\,t + \theta_n\right) \psi_n(x, y),$$

где A_n и θ_n — произвольные постоянные, а ψ_n — собственные функции того же интегрального уравнения (11).

6. Вычислим энергию системы в переменных $q_n(t)$.

Кинетическая энергия T:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (\nabla\varphi)^2 \, d\tau = \frac{\rho}{2} \sum \frac{q_n'^2}{\ldots};$$

потенциальная энергия U:

$$U = \frac{g\rho}{2} \int_{S} \zeta^2 \, dx \, dy = \frac{g\rho}{2} \sum q_n^2.$$

Составляя функцию Лагранжа $L = T - U$, мы убеждаемся что уравнения (12) суть уравнения Лагранжа второго рода малых движений жидкого континуума, если в качестве обобщенных координат возьмем счетную систему функций $\{q_n(t)\}$.

Ростовский на Дону государственный университет им. В. М. Молотова

Поступило 10 VI 1952