Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 5

МАТЕМАТИКА

З. И. ХАЛИЛОВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 VI 1952)

1. В связи с некоторыми задачами современной физики [1] нами рассмотрена задача Коши для бесконечной системы линейных уравнений с частными производными [2].

В настоящей статье исследуется задача Коши для операторного уравнения вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{(k_s)}^{M} A^{(k_s)}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}u}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}+f, \tag{1}$$

где u, f — функции аргументов t, x_s, меняющихся в полосе

$$\Pi=\left\{\begin{matrix}0\leqslant t\leqslant T\\ -\infty<x_s<+\infty, \quad s=1,2,\ldots,n\end{matrix}\right\},$$

со значениями из произвольного пространства Банаха B; M — данное натуральное число; $\sum\limits_{(k_s)}^{M}$ означает сумму по всем k_s, сумма которых не превосходит M; $A^{(k_s)}\equiv A^{(k_1,\ldots,k_n)}(t)$ — операторы, отображающие B в самого себя. Под производной и интегралом функции u по любому из ее аргументов понимаются обычные пределы.

2. Обозначим через $K_\varkappa$ класс функций $f(t,\bar{x})$, непрерывных и ограниченных вместе с производными $\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}f}{\partial x_1^{k_n}\cdots\partial x_n^{k_n}}$, $\sum\limits_s k_s\leqslant\varkappa$ в Π; обозначим через $K'_\varkappa$ класс функций $u(t,\bar{x})$, непрерывных и ограниченных вместе с производными $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}u}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$, $\sum\limits_s k_s\leqslant\varkappa$ в Π.

Следуя Ж. Адамару и И. Г. Петровскому [3], будем говорить, что задача Коши для (1) поставлена равномерно корректно, если удовлетворяются условия:

1°. Для всякой функции $\varphi(\bar{x})\in K_L$ существует решение уравнения (1), обращающееся в $\varphi(\bar{x})$ при $t=t_0$, причем единственное, где t_0 — произвольное число из $[0, T]$.

2°. Любому числу $\varepsilon>0$ можно сопоставлять $\eta>0$, зависящее только от ε и такое, что при любых $\varphi_1(\bar{x})$, $\varphi_2(\bar{x})$ из K_L, отличающихся друг от друга вместе с производными порядка $\leqslant L$ меньше, чем на η, соответствующие им решения из K'_M уравнения (1) отличаются меньше, чем на ε.

3. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{k_s}^{M}(i\alpha_1)^{k_1}\cdots(i\alpha_n)^{k_n}A^{(k_s)}V, \tag{2}$$

где α_s — вещественные параметры, $-\infty<\alpha_s<+\infty$; V — неизвестная оператор-функция.

Ищем решение (2) при начальном условии

$$V|_{t=t_0}=E, \tag{3}$$

где E — единичный оператор. Очевидно, решение задачи Коши (2), (3) зависит от t, t_0 и вектора α.

Если $A^{(k_s)}$ — из кольца линейных операторов и ограничены непрерывной функцией, т. е.

$$\|A^{(k_s)}\|\leqslant K(t), \tag{4}$$

то решение задачи (2), (3) существует, и оно является ограниченной непрерывной оператор-функцией:

$$\|V\|\leqslant\Phi(t, t_0, \bar{\alpha}).$$

В дальнейшем уравнение (1) будем предполагать регулярным, т. е. имеет место неравенство (4).

Если $\Phi(t,t_0,\bar{\alpha})$ с ростом $\alpha_m=\{|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_n|\}$, $\alpha_m\to\infty$, растет не сильнее некоторого полинома относительно α_m равномерно относительно t и t_0, т. е.

$$\Phi(t,t_0,\bar{\alpha})\leqslant C(1+\alpha_m)^p,$$

где C, p — положительные числа, то будем говорить, что для уравнения (1) имеет место условие А.

Теорема 1. *Для равномерной корректности постановки задачи Коши для уравнения* (1) *выполнение условия* А *необходимо.*

В самом деле, пусть задача Коши для (1) поставлена равномерно корректно и условие А не выполняется. Пусть ε_r — произвольная последовательность положительных чисел, $\varepsilon_r\to 0$. Составим $C_r=1/\varepsilon_r$ и зафиксируем L. Тогда каждой паре (C_r, L) соответствуют $t_0^{(r)}$, $\tau^{(r)}$, $\bar{\alpha}^{(r)}$ и $v^{(r)}\in B$, $\|v^{(r)}\|=1$, для которых

$$\|V(t_0^{(r)}+\tau^{(r)}, t_0^{(r)}, \bar{\alpha}^{(r)})v^{(r)}\|>C_r(1+\alpha_m^{(r)})^L.$$

Составим функции

$$\varphi^{(r)}=\frac{\varepsilon_r}{[1+\alpha_m^{(r)}]^L}e^{i\bar{\alpha}^{(r)}\bar{x}}v^{(r)}.$$

Каждой начальной функции $\varphi^{(r)}$ соответствует решение

$$u^{(r)}=V\varphi^{(r)}, \tag{5}$$

являющееся единственным по условию.

Очевидно,

$$\left\|\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}\varphi^{(r)}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\right\|<\varepsilon_r \tag{6}$$

при любых $k_s, \sum_s k_s\leqslant L$.

При $t=t_0^{(r)}$, $t=t_0^{(r)}+\tau^{(r)}$ имеем

$$\| u^{(r)} \| > \frac{\varepsilon_r C_r [1+\alpha_m^{(r)}]^L}{[1+\alpha_m^{(r)}]^L} = 1 . \qquad (7)$$

Из (6), (7) получается, что решение (5) не удовлетворяет п. 2° условия равномерной корректности; этим доказывается теорема.

4. Рассмотрим задачи Коши (2), (3) и

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{(k_s)}^{M} (i\alpha_1)^{k_1} \cdots (i\alpha_n)^{k_n} A^{(k_s)} v + F(t, \bar{x}),$$

$$v|_{t=t_0} = 0 .$$

Лемма 1. *Если* $\| V \| \leqslant C(1+\alpha_m)^p$, $p>0$; $\| F \| \leqslant C_1(1+\alpha_m)^{p_1}$, p_1 — *произвольное число, как положительное, так и отрицательное, то*

$$\| v \| \leqslant C_2 (1+\alpha_m)^{p+p_1},$$

где C_2 — *некоторое число.*

Лемма доказывается на основании формулы:

$$v = \int_{t_0}^{t} V(t, \tau, \bar{\alpha}) F(\tau, \alpha) d\tau .$$

Лемма 2. *При условиях леммы 1, если*

$$\left\| \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} F}{\partial \alpha_1^{k_1} \cdots \partial \alpha_n^{k_n}} \right\| \leqslant C_1 (1+\alpha_m)^{p_1},$$

где $\sum_s k_s \leqslant k$, *то*

$$\left\| \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} v}{\partial \alpha_1^{k_1} \cdots \partial \alpha_n^{k_n}} \right\| \leqslant C_2 (1+\alpha_m)^{p+p_1+\Sigma k_s(M-1+p)} .$$

Следствие. *При всех неотрицательных* k_s

$$\left\| \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} V}{\partial \alpha_1^{k_1} \cdots \partial \alpha_n^{k_n}} \right\| \leqslant C_2 (1+\alpha_m)^{p+\Sigma k_s(M-1+p)} .$$

Лемма 3. *Пусть* $f(\bar{x}) \in K_\varkappa$ *и равна нулю вне куба* $Q_a(|x_s| \leqslant a)$. *Тогда*

$$E_f(\bar{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{x}) e^{-i\bar{\alpha}\bar{x}} dx_1 \cdots dx_n$$

обладает свойством:

$$\| E_f(\bar{\alpha}) \| \leqslant \frac{C}{[1+|\alpha_1|]^{k_1} \cdots [1+|\alpha_n|]^{k_n}},$$

где $\sum_s k_s \leqslant \varkappa$; C *зависит только от* a *и верхних граней норм* f *и всех ее производных по* x_s *порядка* $\leqslant \varkappa$.

Лемма 4. *Пусть*

$$\left\| \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} E(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_1^{k_1} \cdots \partial \alpha_n^{k_n}} \right\| \leqslant \frac{C}{[1+|\alpha_1|]^{2+p_1} \cdots [1+|\alpha_n|]^{2+p_n}},$$

где $\sum_s k_s \leqslant k$, $C > 0$, p_s — *произвольные неотрицательные числа*, $\sum_s p_s \leqslant p$. *Тогда*

$$\left\| \frac{\partial^{l_1+\cdots+l_n} f(\overline{x})}{\partial\alpha_1^{l_1}\ldots\partial\alpha_n^{l_n}} \right\| \leqslant \frac{C_1}{[1+|x_1|]^{m_1}\cdots[1+|x_n|]^{m_n}},$$

где $\sum_s l_s \leqslant p$, $\sum_s m_s \leqslant k$, $C_1 > 0$ *и* $f(\overline{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\overline{\alpha})\, e^{i\overline{\alpha}\overline{x}}\, d\alpha_1\cdots d\alpha_n$.

Теорема 2. *При условии* A, *если* f *и* $\varphi \in K_{M+n+p+1}$ *и равны нулю вне куба* $Q_a\,(|x_s| \leqslant a)$, *то задача Коши для* (1) *имеет решение, определяемое формулой*:

$$u(t, \overline{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} VE_\varphi\, e^{i\overline{\alpha}\overline{x}}\, d\alpha_1\cdots d\alpha_n + \int_{-\infty}^{+\infty} v e^{i\overline{\alpha}\overline{x}}\, d\alpha_1\cdots d\alpha_n,$$

где

$$E_\alpha(\overline{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\overline{x})\, e^{-i\overline{\alpha}\overline{x}}\, dx_1\cdots dx_n,$$

v — *решение задачи Коши*:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{(k_s)}^{M} (i\alpha_1)^{k_1}\cdots(i\alpha_n)^{k_n} A^{(k_s)}\, v + E_f,$$

$$v\,|_{t=t_0} = 0.$$

Теорема 3. *При условии* A, *если* f *и* φ — *произвольные элементы* $\in K_{(2n+1)(M+p)}$, *то задача Коши для* (1) *существует и решение определяется рядом*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u^{(k)},$$

где $u^{(k)}$ — *решение, соответствующее свободному члену* $f^{(k)} = \Phi(\overline{x} - \overline{x}^{(k)}) f$ *и начальному условию* $\varphi^{(k)} = \Phi(\overline{x} - \overline{x}^{(k)})\,\varphi$; $\Phi(\overline{x})$ — *функция, обладающая свойствами*: $0 \leqslant \Phi(\overline{x}) \leqslant 1$; *она имеет всюду непрерывные производные по всем комбинациям* $x_1, \ldots, x_n$ *порядка* $\leqslant (2n+1)(M+p)$; *на кубе* $Q_1\,(|x_s| \leqslant 1)$ *она равна* 1; *вне куба* $Q_{1^1/_2}\,(|x_s| \leqslant 1^1/_2)$ *равна нулю*; $\overline{x}^{(k)}$ — *центры кубов, образованных плоскостями* $x_s = n_s$, *где* n_s — *нечетные числа, как положительные, так и отрицательные.*

Теорема 4. *При условии* A, *если задача Коши для* (1) *имеет решение, то оно единственно.*

Теорема 5. *При условиях теоремы* 3 *решение задачи Коши для* (1) *непрерывно зависит от начальных данных в смысле п.* 2° *параграфа* 2.

На основании всех предыдущих теорем имеет место

Теорема 6. *При условиях теоремы* 3 *задача Коши для* (1) *поставлена равномерно корректно.*

Институт физики и математики
Академии наук Азерб.ССР

Поступило
23 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и А. М. Яглом, ЖЭТФ, 18, в. 8 (1948). [2] З. И. Халилов, Тр. Ин-та физ. и матем. АН Азерб.ССР, матем. сер., 4—5 (1952). [3] И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, А 1 : 7 (1938).