Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 5

МАТЕМАТИКА

И. М. РАПОПОРТ

НОВЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 VI 1952)

Мы указываем в этой статье новый прием построения последовательных приближений для решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Рассматриваемый ниже итерационный процесс отличается весьма быстрой сходимостью. Построение последовательных приближений осуществляется одновременно для n линейно независимых частных решений заданной системы n линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Итак, будем искать матрицу $X(t)$ порядка n, непрерывную вместе со своей первой производной в интервале $(0, T)$ и удовлетворяющую соотношениям

$$X'(t) = A(t)\,X(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \quad X(0) = \Xi \quad (\det \Xi \neq 0), \tag{1}$$

где $A(t)$ — заданная матрица порядка n, непрерывная в интервале $(0, T)$. Пусть $X_0(t)$ — некоторая матрица порядка n, неособенная и непрерывная вместе со своей первой производной в интервале $(0, T)$, причем $X_0(0) = \Xi$. Отправляясь от матрицы $X_0(t)$, как от нулевого приближения, определим m-е приближение формулой

$$X_m(t) = X_0(t)\,[I + Y_1(t)]\,[I + Y_2(t)] \ldots [I + Y_m(t)], \tag{2}$$

где I — единичная матрица, а $Y_1(t)$, $Y_2(t), \ldots$ — матрицы, последовательно определяемые соотношениями

$$Y_{m+1}(t) = \int_0^t \Delta_m(t)\,dt,$$

$$\Delta_{m+1}(t) = [I + Y_{m+1}(t)]^{-1}\,\Delta_m(t)\,Y_{m+1}(t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$\Delta_0(t) = X_0^{-1}(t)\,[A(t)\,X_0(t) - X_0'(t)].$$

Будем предполагать ниже, что матрица $\Delta_0(t) = \| \delta_{ij0}(t) \|$, характеризующая нулевое приближение, удовлетворяет условию

$$\int_0^T \delta(t)\,dt < \frac{7}{16n} \quad \left(\delta(t) = \max_{i,j} \delta_{ij0}(t)\right) \tag{4}$$

(как мы показываем ниже, этим гарантируется существование обратных матриц, фигурирующих в соотношениях (3)).

Обозначим через $\vartheta(t)$ вещественный корень уравнения

$$\vartheta - \vartheta^2 - \vartheta^3 + \frac{3}{2}\vartheta^4 = \frac{n}{2}\int_0^t \delta(t)\,dt, \tag{5}$$

удовлетворяющий неравенству $0 \leqslant \vartheta(t) < 1/2$, и покажем, что элементы $y_{ijm}(t)$ матриц $Y_m(t)$ и элементы $\delta_{ijm}(t)$ матриц $\Delta_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} |y_{ijm}(t)| \leqslant \frac{2}{n}[\vartheta(t)]^{2^{m-1}}, \\ |\delta_{ijm}(t)| \leqslant 2^m\delta(t)[\vartheta(t)]^{2^m-1}\prod_{k=0}^{m-1}\{1-2[\vartheta(t)]^{2^k}\}^{-1}. \end{gathered} \tag{6}$$

Допустим, что функции y_{ijm} и δ_{ijm} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют неравенствам (6), и оценим функции $y_{ij,m+1}$ и $\delta_{ij,m+1}$. Укажем предварительно неравенство

$$\begin{gathered} \prod_{k=1}^{\infty}(1-2\vartheta^{2^k}) \geqslant (1-2\vartheta^2-2\vartheta^4)\prod_{k=3}^{\infty}(1-2\vartheta^{2^k}) \geqslant \ldots \\ \ldots \geqslant 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta^{2^k} \geqslant 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta^{2k} = \frac{1-3\vartheta^2}{1-\vartheta^2} \geqslant 1 - 3\vartheta^2. \end{gathered} \tag{7}$$

Согласно (3), (5), (6) и (7),

$$|y_{ij,m+1}| \leqslant \int_0^t 2^m\delta\vartheta^{2^m-1}(1-2\vartheta)^{-1}(1-3\vartheta^2)^{-1}\,dt = \frac{2}{n}\int_0^{\vartheta} 2^m\vartheta^{2^m-1}\,d\vartheta = \frac{2}{n}\vartheta^{2^m}.$$

Отсюда следует, что элементы матрицы $(I + Y_{m+1})^{-1} - I = -Y_{m+1} + Y_{m+1}^2 - \cdots$ не превосходят $\frac{2}{n}\vartheta^{2^m}(1-2\vartheta^{2^m})^{-1}$ и, таким образом,

$$\begin{aligned} |\delta_{ij,m+1}| &\leqslant 2^m\delta\vartheta^{2^m-1}\prod_{k=0}^{m-1}(1-2\vartheta^{2^k})^{-1}2\vartheta^{2^m}[1+2\vartheta^{2^m}(1-2\vartheta^{2^m})^{-1}] = \\ &= 2^{m+1}\delta\vartheta^{2^{m+1}-1}\prod_{k=0}^{m}(1-2\vartheta^{2^k})^{-1}. \end{aligned}$$

Итак, если неравенствам (6) удовлетворяют функции y_{ijm} и δ_{ijm}, то этим неравенствам удовлетворяют и функции $y_{ij,m+1}$ и $\delta_{ij,m+1}$. В то же время

$$|y_{ij1}| \leqslant \int_0^t \delta(t)\,dt \leqslant \frac{2}{n}\vartheta, \quad |\delta_{ij1}| \leqslant 2\delta\vartheta\left(1 + \frac{2\vartheta}{1-2\vartheta}\right) = \frac{2\delta\vartheta}{1-2\vartheta},$$

и, таким образом, неравенства (6) имеют место при любом $m \geqslant 1$.

Введем далее в рассмотрение матрицы

$$Z_{kl}(t) = [I + Y_k(t)]\,[I + Y_{k+1}(t)]\ldots[I + Y_{k+l-1}(t)] - I, \quad k \geqslant 1, \quad l \geqslant 1, \tag{8}$$

и покажем, что элементы $z_{ijkl}(t)$ матриц $Z_{kl}(t)$ удовлетворяют неравенству

$$|z_{ijkl}(t)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=2}^{2^l}\nu\vartheta^{2^{k-1}(\nu-1)}. \tag{9}$$

Действительно, если неравенство (9) имеет место при некоторых значениях индексов k и l, то, в соответствии с рекуррентным соотношением $Z_{k,\,l+1} = Z_{kl} + Y_{k+l} + Z_{kl}Y_{k+l}$ и неравенствами (6),

$$|z_{ijk,\,l+1}| \leqslant \frac{1}{n}\left[\sum_{\nu=2}^{2^l} \nu\vartheta^{2^{k-1}(\nu-1)} + 2\vartheta^{k+l-1} + \sum_{\nu=2}^{2^l} 2\nu\vartheta^{2^{k-1}(2^l+\nu-1)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left[\sum_{\nu=2}^{2^l+1} \nu\vartheta^{2^{k-1}(\nu-1)} + \sum_{\nu=2^l+2}^{2^{l+1}} 2(\nu-2^l)\,\vartheta^{2^{k-1}(\nu-1)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=2}^{2^{l+1}} \nu\vartheta^{2^{k-1}(\nu-1)}.$$

В то же время $Z_{k1}(t) = Y_k(t)$, и, следовательно, при $l = 1$ неравенство (9) непосредственно следует из неравенств (6).

Согласно (2) и (8), при $M > m$

$$X_M(t) - X_m(t) = X_0(t)\, Z_{1m}(t)\, [Z_{m+1,\,M-m}(t) - I],$$

и, таким образом, в соответствии с неравенством (9),

$$|x_{ijM}(t) - x_{ijm}(t)| \leqslant x_i(t) \sum_{\nu=2}^{2^m} \nu\,[\vartheta(t)]^{\nu-1}\left\{1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu\,[\vartheta(t)]^{2^m(\nu-1)}\right\} =$$

$$= x_i(t)\, F[\vartheta(t), m]\, [1-\vartheta(t)]^{-2}\, [\vartheta(t)]^{2^m},$$

где

$$x_i(t) = \max_j |x_{ij0}(t)|,$$

$$F(\vartheta, m) = (2-\vartheta^{2^m})(1-\vartheta^{2^m})^{-2}\,[1-\vartheta^{2^m} - 2^m(1-\vartheta)\,\vartheta^{2^m}].$$

Как показывает исследование функции $F(\vartheta, m)$, $F(\vartheta, m) \leqslant 2$ в области $0 \leqslant \vartheta < {}^1/_2$, $m \geqslant 0$. Таким образом, последовательность матриц $X_m(t)$ равномерно сходится в интервале $(0, T)$, причем элементы $x_{ij}(t)$ предельной матрицы $X(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|x_{ij}(t) - x_{ijm}(t)| \leqslant 2x_i(t)\,[1-\vartheta(t)]^{-2}\,[\vartheta(t)]^{2^m} < 8x_i(t)\,({}^1/_2)^{2^m}. \qquad (10)$$

Покажем, в заключение, что предельная матрица $X(t)$ удовлетворяет соотношениям (1). В соответствии с рекуррентными формулами (3), при $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$X_m'(t) = A(t)\,X_m(t) - X_m(t)\,\Delta_m(t). \qquad (11)$$

Действительно, если соотношение (11) справедливо при каком-либо значении индекса m, то, согласно (2) и (3),

$$X_{m+1}' = X_m'(I + Y_{m+1}) + X_m Y_{m+1}' =$$

$$= AX_m(I + Y_{m+1}) - X_m\Delta_m Y_{m+1} = AX_{m+1} - X_{m+1}\Delta_{m+1},$$

в то же время при $m = 0$ соотношение (11) непосредственно следует из определения матрицы $\Delta_0(t)$.

При любом m $X_m(0) = X_0(0) = \Xi$, и, следовательно, согласно (11) и (6), последовательность матриц $X_m(t)$ сходится к искомой матрице $X(t)$, удовлетворяющей соотношениям (1).

В качестве простейшего примера рассмотрим вопрос о построении решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ дифференциального уравнения $x''(t) + [\lambda - q(t)]\,x(t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\lambda > 0$, удовлетворяющих начальным условиям $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = \sqrt{\lambda}$. Решение вопроса сведется к построению матрицы $X(t)$, удовлетворяющей соотношениям (1), если положить

$$X(t) = \begin{Vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{Vmatrix}, \quad A(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ q(t) - \lambda & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Xi = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{Vmatrix}.$$

Если в качестве нулевого приближения воспользоваться матрицей, удовлетворяющей соотношениям (1) при $q(t) \equiv 0$, то для матриц $X_0(t)$ и $\Delta_0(t)$ получим выражения

$$X_0(t) = \begin{Vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}t & \sin\sqrt{\lambda}t \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t \end{Vmatrix},$$

$$\Delta_0(t) = \frac{q(t)}{2\sqrt{\lambda}} \begin{Vmatrix} -\sin 2\sqrt{\lambda}t & -2\sin^2\sqrt{\lambda}t \\ 2\cos^2\sqrt{\lambda}t & \sin 2\sqrt{\lambda}t \end{Vmatrix}.$$

Условие (4) заведомо будет выполняться при $\sqrt{\lambda} > {}^{32}/_{7} \int\limits_{1}^{T} |q(t)|\,dt$.

Построив в этом случае m-е приближение для матрицы $X(t)$ в соответствии с формулами (2) и (3), мы определим искомые функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с погрешностью, не превосходящей в интервале $(0, T)$ $2(1-\varphi)^{-2}\varphi^{2^m}$, где φ — вещественный корень уравнения $\varphi - \varphi^2 - \varphi^3 + \frac{3}{2}\varphi^4 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int\limits_0^T |q(t)|\,dt$, удовлетворяющий неравенству $0 \leqslant \varphi < {}^1/_2$.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
3 VI 1952