Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ЛИННИК

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА И СТЕПЕНИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ЧИСЛА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 18 VI 1952)

В статье [1] мною дана условная формула для числа решений уравнения

$$N = p + p' + 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_k},$$

где N — большое четное число, k — константа, $x_k > 0$. Эта формула выводилась там с помощью расширенной гипотезы Римана, причем высказывалось предположение о возможности обхода расширенной гипотезы Римана с помощью „плотностных" теорем.

Такой обход гипотезы Римана, действительно, удается осуществить, причем получаются, уже без всяких гипотез, следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть $g \geqslant 2$ — фиксированное целое число, $k \geqslant 3$ — фиксированное целое число, N — большое число одинаковой четности с kg.*

Рассматриваем уравнение

$$N = p + p' + g^{x_1} + \cdots + g^{x_k}, \tag{1}$$

где $x_l > 0$ — целые; p, p' — простые числа, и вводим количество

$$Q_k(N, g) = \sum \ln p \ln p', \tag{2}$$

где суммирование распространяется по всем решениям уравнения (1).

Тогда можно утверждать, что при достаточно большом фиксированном k уравнение (1) *будет иметь решения и что будет*

$$Q_k(N, g) = \sum_{(N_1)} \mathfrak{S}(N_1) N_1 + \rho(N), \tag{3}$$

где N_1 пробегает все четные числа вида

$$N - g^{x_1} - g^{x_2} - \cdots - g^{x_k} \geqslant 2,$$

$$\mathfrak{S}(N_1) = \prod_{p/N_1}\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)\prod_{p \nmid N_1}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > c_0 > 0,$$

$$|\rho(N)| < CN\left(\frac{\ln N}{\ln g}\right)^k [(1-\eta)^{k-2} + \eta_1(\eta)], \tag{4}$$

где при заданном g $C > 0$ — константа, $\eta > 0$ — произвольно малое фиксированное число, $\eta_1(\eta) > 0$ — число сколь угодно малое при достаточно малом η,

$$\sum_{(N_1)} \mathfrak{S}(N_1)\, N_1 > c_1 N \left(\frac{\ln N}{\ln g}\right)^k. \tag{5}$$

То, что (3) нетривиальна и дает решения (1), видно из того, что мы можем сперва выбрать η столь малым, чтобы было $C\eta_1(\eta) < c_1/4$, а затем, закрепив η, выбрать k столь большим, чтобы было $C(1-\eta)^{k-2} < c_1/4$. Тогда остаточный член $\rho(N)$ в (3), в силу (5), не будет превосходить половины главного.

Некоторым усилением теоремы 1 для $g = 2$ является теорема 2.

Теорема 2. *Существует константа $K_0 > 0$ со следующим свойством. Если достаточно большое четное N записать в двоичной системе счисления, то достаточно переменить не более, чем в K_0 местах цифру 0 на 1 или цифру 1 на 0, чтобы получить сумму двух простых чисел.*

Поступило
17 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 38, 152 (1951). [2] Ю. В. Линник, Вестн. Ленингр. гос. ун-та, № 2, 40 (1946).