Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 5

МАТЕМАТИКА

С. Т. ЗАВАЛО

ОПЕРАТОРНЫЕ СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 VI 1952)

Операторные группы широко используются и заслуживают детального изучения. Естественно, в частности, ввести и изучить понятие операторной свободной группы, как обобщение понятия свободной группы. Группу без операторов можно рассматривать как операторную группу, область операторов которой или состоит из одного лишь тождественного автоморфизма (единичная группа операторов) или же есть пустое множество. Поэтому обобщениями понятия свободной группы будут понятия операторной свободной группы с группой операторов и с произвольным множеством операторов. В работе и изучаются эти операторные свободные группы.

Так как операторную группу с произвольным множеством операторов всегда можно считать операторной свободной группой, областью операторов которой является свободная ассоциативная система (полугруппа), порожденная данным множеством операторов, то основные определения даются в предположении, что областью операторов является некоторая полугруппа Σ, и в этом же предположении доказываются некоторые теоремы.

Основной вопрос — о строении допустимых подгрупп операторной свободной группы — изучается отдельно в случае группы операторов и в случае свободной ассоциативной системы операторов.

Вопрос о строении допустимых подгрупп является чрезвычайно трудным. Для операторных свободных групп теорема, аналогичная теореме Нильсена — Шрейера о подгруппах свободной группы, не имеет места. Поэтому возникает необходимость описания строения допустимых подгрупп или, по крайней мере, отыскания широкого класса подгрупп, которые являлись бы операторными свободными группами. В работе дается полное описание строения всех допустимых подгрупп операторной свободной группы с группой операторов, а для случая операторных свободных групп со свободной ассоциативной системой операторов указывается один класс допустимых подгрупп, являющихся операторными свободными группами.

Пусть дана операторная группа G, областью операторов которой является подгруппа Σ, состоящая из элементов $\varepsilon, \alpha, \beta, \ldots$, где ε — единичный элемент этой полугруппы.

Это означает, что каждому элементу α полугруппы Σ соответствует некоторый эндоморфизм группы G, отображающий элемент $g \in G$ в элемент $g\alpha \in G$, причем выполняются следующие условия:

1) $(g\alpha)\beta = g(\alpha\beta)$,
2) $g\varepsilon = g$,

где g — произвольный элемент группы G, а α, β — произвольные элементы полугруппы Σ.

Определение. Операторную группу G с полугруппой операторов Σ будем называть Σ-свободной группой, если G — свободная группа и если в G существует такое множество M элементов x_i (i пробегает некоторое множество значений), что множество M_Σ всех элементов вида $x_i\alpha$, где x_i — произвольный элемент множества M, а α — произвольный элемент полугруппы Σ, является ее системой свободных образующих.

Множество M будем называть системой свободных образующих этой Σ-свободной группы, а его мощность (т. е. число его элементов, если оно конечно) — рангом этой группы.

Определение. Пусть дано некоторое множество операторных групп G_i (i пробегает некоторое множество значений) с одной и той же полугруппой операторов Σ. Свободное произведение $G = \prod\limits_i^* G_i$ этих групп сделаем операторной группой с полугруппой операторов Σ. Для этого каждому оператору $\sigma \in \Sigma$ поставим в соответствие эндоморфизм группы G, который элемент $g_1 \cdot g_2 \ldots g_n$, где $g_k \in G_{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, отображает в элемент $g_1\sigma \cdot g_2\sigma \ldots g_n\sigma$. Группу G мы будем называть операторным свободным произведением операторных групп G_i.

Теорема 1. *Всякая операторная группа F с полугруппой операторов Σ операторно изоморфна фактор-группе некоторой Σ-свободной группы.*

На основании этой теоремы вводится понятие определяющих соотношений операторной группы и доказывается, что *всякая операторная группа F с полугруппой операторов Σ вполне определяется заданием ее определяющих соотношений.*

Пусть область операторов Σ является группой. Обозначим ее буквой Γ.

Определение. Допустимую подгруппу Γ-свободной группы G, порожденную множеством элементов вида $g^{-1} \cdot g\alpha_i$, где g — некоторый фиксированный элемент группы G, отличный от 1, а α_i пробегает все элементы некоторой подгруппы Δ группы Γ, будем называть группой $A_{g,\Delta}$.

Для групп $A_{g,\Delta}$ имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Если подгруппа Δ группы Γ задается относительно системы образующих M определяющими соотношениями*

$$\alpha_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \alpha_{i2}^{\varepsilon_{i2}} \ldots \alpha_{in_i}^{\varepsilon_{in}} = \varepsilon,$$

где $\varepsilon_{ik} = \pm 1$, $k = 1, 2, \ldots, n_i$, i — номер соотношения, то группа $A_{g,\Delta}$ задается относительно системы образующих N, состоящей из элементов $a_j = g^{-1} \cdot g\alpha_j$, где α_j — произвольный элемент из M, определяющими соотношениями

$$a_{in_i}^{\varepsilon_{in_i}} \alpha_{in_i}^{\delta(\varepsilon_{in_i})} \cdot a_{i,n_i-1}^{\varepsilon_{i,n_i-1}} \alpha_{i,n_i-1}^{\delta(\varepsilon_{i,n_i-1})} \alpha_{i,ni}^{\varepsilon_{in_i}} \ldots a_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \alpha_{i1}^{\delta(\varepsilon_{i1})} \alpha_{i2}^{\varepsilon_{i2}} \ldots \alpha_{in_i}^{\varepsilon_{in_i}} = 1,$$

где

$$\delta(\varepsilon_{ik}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon_{ik} = 1, \\ -1, & \text{если } \varepsilon_{ik} = -1. \end{cases}$$

Следующая теорема является основной:

Теорема 3. *Всякая допустимая подгруппа U Γ-свободной* *группы G, отличная от E, есть операторное свободное произведение Γ-свободной группы F и операторных групп A_{g_ν, Δ_ν}, т. е.*

$$U = F * \prod_{\nu}^{*} A_{g_\nu, \Delta_\nu}.$$

Доказательство этой теоремы следует плану доказательства теоремы А. Г. Куроша о подгруппах свободного произведения групп ([1]). Сохраняются и формулировки отдельных лемм, однако конструкция, лежащая в основе доказательства, и детали доказательств лемм совсем иные.

Пусть теперь область операторов Σ является свободной ассоциативной системой, состоящей из элементов σ_i. В этом случае область операторов будем обозначать буквой S.

Определение. Допустимая подгруппа U S-свободной группы G называется вполне допустимой, если вместе со всяким элементом $g\sigma_i$ она содержит и элемент g.

Допустимая подгруппа, порожденная некоторым множеством вполне допустимых подгрупп, не всегда будет вполне допустимой. Поэтому естественно из всех вполне допустимых подгрупп выделить класс подгрупп, каждая из которых обладает следующим свойством: произвольное множество ее вполне допустимых подгрупп порождает вполне допустимую подгруппу.

Для подгрупп этого класса справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Если подгруппа U S-свободной группы вполне допустима и если произвольное множество ее вполне допустимых подгрупп порождает вполне допустимую подгруппу, то U является S-свободной группой.*

Из каждой из двух последних теорем непосредственно вытекает теорема Нильсена — Шрейера о подгруппах свободной группы без операторов.

Теорема 5. *Если Σ есть группа или свободная ассоциативная система, то ранг всякой Σ-свободной группы является ее инвариантом, т. е. не зависит от выбора системы свободных образующих.*

Теорема 6. *Если в полугруппе Σ содержится элемент, отличный от единицы ε, то в Σ-свободной группе $G = \{x\}_\Sigma$ ранга 1 содержатся Σ-свободные подгруппы счетного, а следовательно и какого угодно конечного, ранга.*

Поступило
29 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош, Теория групп, 1944.