Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

О. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 V 1952)

Для уравнения

$$Lu+f\equiv\sum_{i,\,j=0}^{n}a_{ij}(X,x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+au+f=0 \qquad (1)$$

рассматривается следующая смешанная задача: определить в конечном цилиндре $Q=\Omega X[0\leqslant x_0\leqslant l]$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{x_0=0}=\varphi(X),\quad \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0}=\psi(X) \qquad (2)$$

и на боковой поверхности цилиндра нулевому предельному условию.

Относительно уравнения (1) предполагается, что оно принадлежит к нормальному гиперболическому типу, т. е.

$$a_{00}\equiv 1,\qquad -\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \qquad (3)$$

где $\alpha=\mathrm{const}>0$, а $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — произвольные вещественные числа.

При сравнительно малых требованиях на данные задачи строится с помощью конечных разностей так называемое обобщенное решение задачи (его определение дается ниже). Затем исследуется, при каких условиях, наложенных на коэффициенты уравнения (1), границу Γ области Ω и начальные функции φ и ψ, найденное выше обобщенное решение обладает теми или иными дифференциальными свойствами. На этом пути, в частности, выясняется, когда обобщенное решение имеет в $\overline{Q}$ непрерывные производные второго порядка и является, тем самым, классическим решением задачи.

Будем пользоваться обозначениями классов функции W_2^k, $\overset{0}{D}(\Omega)$ и $\overset{0}{D}_1(Q)$, определенными в заметке [1], причем роль t играет здесь переменная x_0.

Предположим, что функции a_{ij}, $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$, a_i и a непрерывны в $\overline{Q}$, $f\in L_2(Q)$, $\varphi\in\overset{0}{D}(\Omega)$, $\psi\in L_2(\Omega)$. Назовем **обобщенным решением** поставленной задачи функцию $u(X, x_0)$, принадлежащую классу $\overset{0}{D}_1(Q)$, принимающую на нижнем основании Q (при $x_0 = 0$) значения, равные φ, и удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\iint\limits_{\Omega}\int\limits_0^l \Big\{\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + 2\sum_{i=1}^n a_{0i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} +$$

$$+\Big[2\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{0i}}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{=0}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - au - f\Big]\Phi\Big\}\, dX\, dx_0 +$$

$$+\int\limits_{\Omega}\Big(\psi + 2\sum_{i=1}^n a_{0i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big)\Phi\Big|_{x_0=0} dX = 0$$

при любой функции Φ из $\overset{0}{D}_1(Q)$, равной нулю на верхнем основании цилиндра (при $x_0 = l$).

Теорема 1. *При перечисленных выше условиях на данные задачи и при произвольной конечной области Ω, лежащей в основании цилиндра Q, существует обобщенное решение поставленной задачи.*

Предположим сначала, что функции f, φ и ψ непрерывны, причем φ и ψ равны нулю вблизи границы Ω и φ имеет непрерывные первые производные.

В этом случае решение задачи $u(X, x_0)$ получаем как предел при $h \to 0$ некоторых непрерывных функций u_h' из $\overset{0}{D}_1(Q)$, которые сходятся к u слабо в $W_2^1(Q)$ и равномерно относительно $x_0 \in [0, l]$ в $L_2(\Omega)$. Функция u_h' получена полилинейной интерполяцией по $x_0, \ldots, x_n$ функции u_h, определенной на точках решетки и являющейся решением некоторого разностного уравнения при нулевом граничном условии. Укажем способ определения функции u_h.

Разобьем все пространство $x_0, \ldots, x_n$ плоскостями $x_i = \mathrm{const}$ на параллелепипеды $Q_{k_0,\ldots,k_n}$, координаты точек которых определяются неравенствами $k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1)h$, $i = 1,\ldots, n$, $k_0\Delta x_0 \leqslant x_0 \leqslant (k_0+1)\Delta x_0$, где k_i и k_0 — целые числа.

Обозначим через Q_h область, составленную из $Q_{k_0,\ldots,k_n}$, заключенных внутри Q, а через Ω_h и F_h — ее нижнее основание и боковую поверхность, соответственно. Пусть, далее, Γ_h есть контур Ω_h. Эти же обозначения Q_h, Ω_h, F_h и Γ_h сохраним и за совокупностями точек решетки (вершин $Q_{k_0,\ldots,k_n}$), принадлежащих Q_h, Ω_h, F_h и Γ_h, соответственно.

Для разностных отношений в точке решетки $(x_1, \ldots, x_n, x_0)$ вводятся следующие обозначения:

$$u_{x_i} = \frac{1}{\Delta x_i}[u(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_0) - u(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_0)],$$

$$u_{\bar{x}_i} = \frac{1}{\Delta x_i}[u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_0) - u(x_1, \ldots, x_i - \Delta x_i, \ldots, x_n)],$$

$$u_{x_i\bar{x}_j} = (u_{x_i})_{\bar{x}_j} = (u_{\bar{x}_j})_{x_i}.$$

Если коэффициенты $a_{0i} \equiv 0$, то u_h определяется как решение разностного уравнения

$$L_h u + f \equiv u_{\bar{t}t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i\bar{x}_j} + \sum_{i=0}^n a_i u_{\bar{x}_i} + au + f = 0,$$

равное нулю во всех точках решетки, принадлежащих F_h, равное значениям φ на точках Ω_h (при $x_0 = 0$) и равное $\varphi + \Delta x_0 \psi$ на точках Q_h, принадлежащих плоскости $x_0 = \Delta x_0$.

При h достаточно малых граничное условие для u_h на F_h не противоречит начальным условиям для u_h на Γ_h.

Для того чтобы u'_h сходились в указанном выше смысле к искомому решению задачи, достаточно потребовать, чтобы для какого-нибудь $\varepsilon > 0$ имело место неравенство

$$\frac{\Delta x_0}{h} \leqslant \min \left\{ \frac{1}{n^2 \gamma_1}, \frac{\alpha}{n \gamma_1} \right\} - \varepsilon, \tag{4}$$

где $\gamma_1 = \max_{i, j, Q} |a_{ij}|$, а α — число, входящее в неравенство (3).

Если $a_{0i} \not\equiv 0$, то u_h определяются из другого разностного уравнения:

$$\tilde{L}_h u + f \equiv u_{\bar{t}t} + \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i \bar{x}_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{0i} (u_{x_i t} + u_{\bar{x}_i t} + u_{x_i \bar{t}} + u_{\bar{x}_i \bar{t}}) + \\ + \sum_{i=0}^{n} a_i u_{\bar{x}_i} + au + f = 0$$

при тех же граничных и начальных условиях, что и выше. На этот раз для определения решения u_h в точках Ω_h, принадлежащих какой-нибудь плоскости $x_0 = k_0 \Delta x_0$, придется решать систему алгебраических уравнений с неизвестными — значениями $u_h(x_1, \ldots, x_n, k_0 \Delta x_0)$ во всех этих точках. Доказывается, что все эти системы однозначно разрешимы и их решения u_h дают в пределе искомое решение смешанной задачи, если $\Delta x_0 / h$ подчиняется тому же неравенству (4).

Одновременно с этим устанавливается, что для u справедливо основное неравенство

$$\| u \|^2_{W_2^1(Q)} \leqslant C \left[\| \varphi \|^2_{W_2^1(\Omega)} + \| \psi \|^2_{L_2(\Omega)} + \| f \|^2_{L_2(Q)} \right], \tag{5}$$

в котором постоянная C определяется лишь коэффициентами уравнения (1), площадью Ω и высотой l.

Для функций f, φ и ψ, удовлетворяющих условиям теоремы, решение находится как предел в $W_2^1(Q)$ решений, соответствующих гладким f, φ и ψ.

Далее имеет место следующая

Теорема 2. *Если коэффициенты уравнения* (1) *и их обобщенные производные*

$$\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n,$$

ограничены по модулю в Q, то существует не более одного обобщенного решения задачи.

Используя снова конечные разности, мы устанавливаем, при каких условиях найденное выше обобщенное решение принадлежит классу $W_2^k(Q)$, где k — любое наперед заданное натуральное число.

Теорема 3. *Если коэффициенты уравнения* (1) *имеют в $\overline{Q}$ непрерывные производные по $x_0, \ldots, x_n$ до порядка $k-1$ ($k \geqslant 3$), граничные функции $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$, дающие уравнение контура Γ области Ω в местных системах координат, имеют непрерывные* *производные до $k+1$-го порядка,* $f \in W_2^{(k-1)}(Q)$ *и* $\left.\frac{\partial^s f}{\partial x_0^s}\right|_{x_0=0} = 0,\ s = 0, \ldots$ $\ldots, k-2,$ *то обобщенное решение задачи для уравнения* (1) *и нулевых начальных функций* φ *и* ψ *принадлежит* $W_2^k(Q)$ *и для него имеет место неравенство*

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} \leqslant C \|f\|_{W_2^{k-1}(Q)}.$$

Теорема 3 остается в силе и для $k=2$, если к указанным в теореме условиям присоединить требование единственности обобщенного решения. Если $k \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] + 3$, то найденное нами обобщенное решение имеет (в силу теоремы вложения С. Л. Соболева) в Q непрерывные вплоть до контура производные второго порядка и является, тем самым, классическим решением задачи. При $k \geqslant 2$ обобщенное решение почти всюду в Q удовлетворяет уравнению (9), а оба начальные условия принимаются в среднем.

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *имеют непрерывные производные до $k-1$-го порядка, а функции* $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$ — *до порядка* $k+2$ *и пусть*

$$\varphi \in W_2^{k+1}(\Omega), \quad \psi \in W_2^k(\Omega), \quad \chi \in W_2^{(k+1)}(F), \quad f \in W_2^{(k-1)}(Q).$$

Если для этих функций выполнены на Γ *при* $x_0 = 0$ *условия согласования до k-го порядка, т. е. если значения* $\left.\frac{\partial^s u}{\partial x_0^s}\right|_{x_0=0},\ s = 0, 1, \ldots k,$ *вычисленные при помощи уравнения* (1), *исходя из* φ *и* ψ, *совпадают на* Γ, *соответственно, со значениями* $\left.\frac{\partial^s \chi}{\partial x_0^s}\right|_{x_0=0},\ s = 0, 1, \ldots, k,$ *то обобщенное решение задачи существует и принадлежит классу* $W_2^k(Q)$.

Поступило
7 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Ладыженская, ДАН, 85, № 3 (1952).