Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

Л. И. КАМЫНИН

О СХОДИМОСТИ КОНЕЧНОРАЗНОСТНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 31 V 1952)

Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей приводит к необходимости рассмотрения конечноразностных операторов. Однако конечноразностные и дифференциальные операторы не эквивалентны, что иногда приводит к серьезным трудностям при применении метода конечных разностей.

В ([2]) было установлено различие теорем единственности для решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

и решения соответствующей бесконечной системы конечноразностных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial u^{(h)}(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{h^2}\left(u^{(h)}(x+h, t) - 2u^{(h)}(x, t) + u^{(h)}(x-h, t)\right), \\ u^{(h)}(x, 0) = \varphi(x), \quad x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots \end{gathered} \tag{2}$$

Согласно теореме А. Н. Тихонова ([1]), решение уравнения (1) единственно в классе функций, удовлетворяющих оценке

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} u(x, t)\, e^{-Cx^2} \to 0 \quad \text{при } |x| \to \infty.$$

Единственность решения системы (2) обеспечена в классе функций, подчиненных условию

$$\begin{gathered} |u(x, t)| \leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|x|}{h}\right]!, \\ x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots; \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \end{gathered} \tag{3}$$

В классе функций с оценкой роста по x

$$|u(x, t)| \leqslant A\left[(1+\varepsilon)\frac{|x|}{h}\right]!, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

единственность решения (2) нарушается. Таким образом, область единственности решения системы (2) существенно у́же области единственности решения уравнения (1).

В связи с этим естественно возникает вопрос о сходимости конечно-разностного процесса для уравнения теплопроводности (1), который и рассматривается в настоящей заметке.

Теорема 1. *Если $\varphi(x)$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$ и справедлива оценка*

$$|\varphi(x)| \leqslant A e^{C|x| \ln(1+|x|)}, \tag{4}$$

где A и C — постоянные, то решение системы (2), *удовлетворяющее начальным данным*

$$u^{(h)}(x, 0) = \varphi(x), \quad x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots,$$

сходится при $h \to 0$ к интегралу Пуассона

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-(x-\xi)^2/4t} d\xi, \tag{5}$$

являющемуся решением уравнения теплопроводности (1).

Для доказательства теоремы 1 выписывается решение системы (2) в явном виде ([2]):

$$u^{(h)}(nh, t) = \varphi(nh) e^{-2t/h^2} I_0\left(\frac{2t}{h^2}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi(nh + kh) + \varphi(nh - kh)) e^{-2t/h^2} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right), \tag{6}$$

$$n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

после чего, учитывая асимптотическое представление ([3])

$$e^{-2t/h^2} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) \frac{h\left(\sqrt{1 + \frac{k^2h^4}{4t^2}} + \frac{kh^2}{2t}\right)^{-k}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{k^2h^4 + 4t^2}} \exp\left\{\frac{k^2h^2}{\sqrt{k^2h^4 + 4t^2} + 2t}\right\} \times$$

$$\times \left(1 + O\left(\frac{h^2}{\sqrt{k^2h^4 + 4t^2}}\right)\right), \tag{7}$$

справедливое при $k \leqslant 1/h^{2-\alpha}$ $(\alpha > 0)$, оценку (4) и неравенство Каптейна ([3])

$$e^{-2t/h^2} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) \leqslant e^{-k \ln \frac{kh^2 + \sqrt{k^2h^4 + 4t^2}}{2t} + \frac{\sqrt{k^2h^4 + 4t^2} - 2t}{h^2}},$$

обосновывается предельный переход при $h \to 0$.

Теорема 2. *Если $\varphi(x)$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$ и удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi(x)| \leqslant A e^{C|x|^{2-\delta}} \tag{8}$$

(где A, C и $\delta > 0$ постоянные), то решение системы (2) *с «урезанными» начальными данными*

$$u_X^{(h)}(x, 0) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leqslant X \\ 0, & |x| > X; \quad x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots, \end{cases} \tag{9}$$

сходится к интегралу Пуассона при $h = 1/X^{1+\alpha} \to 0$ $(X \to +\infty)$ и $\alpha \geqslant 0$.

Однако $\lim\limits_{X} u_X^{(h)}(x, t)$ *не существует, если* $\varphi(x) = e^{|x|^{2-\delta}}$, $h = 1/X^{1-\varepsilon}$, $X \to \infty$ *и* $\varepsilon > \delta > 0$.

Доказательство первого утверждения теоремы 2 не отличается от доказательства теоремы 1.

Доказательство второго утверждения следует из явного вида решения системы (2) с «урезанными» начальными данными (9), получающегося из (6), асимптотического представления (7) и неравенства

$$e^{X^{2-\delta}-2tX^{2(1-\varepsilon)}} I_{X^{2-\varepsilon}}(2tX^{2(1-\varepsilon)}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\exp\left\{-\frac{X^{2-\varepsilon}}{2}\ln\left(1+\frac{2X^{2\varepsilon}}{t^2}\right)+X^{2-\delta}\right\}}{\sqrt{2\pi}\,X^{1-\varepsilon}\sqrt{X^{2\varepsilon}+4t^2}}\left(1+O\left(\frac{1}{X^{2(1-\varepsilon)}\sqrt{X^{2\varepsilon}+4t^2}}\right)\right).$$

Замечание. Если $\varphi(x)$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$ и удовлетворяет неравенству (4), то решение системы (2) с «урезанными» начальными данными (9) сходится к интегралу Пуассона при любом соотношении между h и X (при $h \to 0$, $X \to +\infty$).

Замечание есть следствие теоремы 1.

Теорема 3. *Если* $\varphi(x)$ *непрерывна при* $-\infty < x < +\infty$ *и справедлива оценка* (8), *то решение «урезанной»* ($x = -X, \ldots, -h, 0, h, \ldots, X$) *системы* (2) *с нулевыми краевыми условиями*

$$u_X^{(h)}(\pm X, t) = 0$$

и начальными данными

$$u_X^{(h)}(x, 0) = \varphi(x), \quad |x| \leqslant X,$$

сходится к интегралу Пуассона при $h = 1/X^{2+\varepsilon} \to 0$ ($X \to +\infty$).

Методом Фурье теорема доказывается для $\varphi(x)$, имеющих на $[-X, X]$ две непрерывных производных, причем $\varphi(\pm X) = \varphi'(\pm X) = 0$, а затем при помощи теоремы 2 и принципа максимума, справедливого для конечноразностной системы (2), доказательство переносится на случай произвольной непрерывной функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей лишь оценке (8).

Итак, если начальная функция $\varphi(x)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству (4), то решение системы (2), представимое в виде (6), единственно в классе (3) и сходится при $h \to 0$ к единственному в условиях теоремы А. Н. Тихонова решению (5) уравнения (1).

Если же начальная функция $\varphi(x)$, удовлетворяя условию А. Н. Тихонова (8), не удовлетворяет неравенству (4), то конечноразностный процесс может расходиться. Однако, рассматривая в этом случае либо систему (2) с «урезанными» начальными данными (9), либо «урезая» систему (2) с добавлением нулевых краевых условий, можно, согласно теоремам 2 и 3, добиться сходимости конечноразностного процесса, беря шаг h достаточно малым по отношению к параметру «урезания» X.

В заключение автор приносит глубокую благодарность акад. С. Л. Соболеву за помощь и ценные советы.

Поступило
27 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, Матем. сборн., 42, 2, 199 (1935). [2] Л. И. Камынин, ДАН, 82, № 1, 13 (1952). [3] Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, 1949.