Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

Е. Б. ДЫНКИН

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 VI 1952)

В работе рассматриваются линейные унитарные представления группы $U(n)$ всех унитарных матриц порядка n с определителем 1, т. е. гомоморфные отображения $U(n)$ в $U(N)$. Эти отображения исследуются с топологической точки зрения. Вычисляются их гомологические характеристики. Доказывается, что эти характеристики определяют неприводимое представление с точностью до эквивалентности. Аналогичные результаты могут быть получены для гомоморфных отображений произвольных классических групп друг в друга.

Л. С. Понтрягин [1], отправляясь от операции умножения в группе Ли $\mathfrak{G}$, построил операцию умножения циклов из $\mathfrak{G}$ (произведение циклов размерностей p и q есть цикл размерности $p+q$) и показал, что класс гомологий, к которому принадлежит произведение циклов, зависит только от классов гомологий, к которым принадлежат сомножители. В работе [1] для группы $U(n)$ построен некоторый набор циклов $z_2, z_3, \ldots, z_n$ (размерность z_k равна $2k-1$) и доказано, что произведения $z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_k}$ $(k=0, 1, \ldots, n;\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$* образуют базис гомологий в группе $U(n)$. Мы будем называть циклы $z_2, \ldots, z_n$ примитивными циклами группы $U(n)$.

Теорема. *Пусть φ — гомоморфное отображение $U(n)$ в $U(N)$. Пусть $z_2, \ldots, z_n$ — примитивные циклы $U(n)$, $Z_2, \ldots, Z_N$ — примитивные циклы $U(N)$ (размерности z_k и Z_k равны $2k-1$).*

Тогда для $k = 2, 3, \ldots, n$ $\varphi(z_k)$ гомологично в $U(N)$ циклу $d_k(\varphi) Z_k$, где $d_k(\varphi)$ — некоторое целое число.

*Если φ и ψ — унитарные представления группы $U(n)$ и хотя бы одно из них неприводимо, то из равенств***

$$\frac{d_k(\varphi)}{N(\varphi)} = \frac{d_k(\psi)}{N(\psi)} \quad (k = 2, 3, \ldots, n) \tag{1}$$

вытекает, что представления φ и ψ эквивалентны, т. е. существует унитарная матрица A такая, что для всех $g \in U(n)$ $A\varphi(g)A^{-1} = \psi(g)$.

Отметим некоторые свойства чисел $d_k(\varphi)$:

А. $d_k(\varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \varphi_s) = d_k(\varphi_1) + d_k(\varphi_2) + \cdots + d_k(\varphi_s)$.

---

* При $k=0$ произведение $z_{i_1} \ldots z_{i_k}$ условно истолковывается как положительно ориентированная точка многообразия $U(n)$.

** $N(\varphi)$ обозначает размерность представления φ.

Б. $d_k(\varphi \times \psi) = N(\psi)\, d_k(\psi) + N(\psi)\, d_k(\varphi)$ *.

В. Для того чтобы образ группы $U(n)$ при ее гомоморфном отображении φ в группу $U(N)$ был гомологичен нулю в $U(N)$, необходимо и достаточно, чтобы $d_2(\varphi)\, d_3(\varphi) \ldots d_n(\varphi) = 0$.

Формула А сводит задачу вычисления $d_k(\varphi)$ для любого представления φ к аналогичной задаче для неприводимых представлений. Неприводимые представления группы $U(n)$ задаются по Картану и Вейлю (см., например, [2]) набором неотрицательных целых чисел $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$.

Числа $d_k(\varphi)$ выражаются через m_k следующей формулой:

$$d_k(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{N}{n} \, \frac{B_k(l_1, l_2, \ldots, l_n) - B_k(r_1, r_2, \ldots, r_n)}{B_k(r_1 + 1, r_2, \ldots, r_n) - B_k(r_1, r_2, \ldots, r_n)}, \tag{2}$$

где

$$r_i = n - i, \quad l_i = m_i + r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{3}$$

$$B_k(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \frac{(y_{i_1} + y_{i_2}\theta + \cdots + y_{i_k}\theta^{k-1})^{\frac{k(k+1)}{2}}}{\prod\limits_{1 \leqslant p < q \leqslant k} (y_{i_p} - y_{i_q})} \tag{4}$$

(θ — первообразный корень k-й степени из единицы, суммирование по всевозможным упорядоченным наборам $(i_1, \ldots, i_k)$, выбранным из совокупности $1, 2, \ldots, n$).

Для полиномов B_k можно дать и другое выражение. Рассмотрим всевозможные деревья D, имеющие k вершин. Занумеруем вершины каждого дерева в произвольном порядке числами $1, 2, \ldots, k$ и отнесем каждой вершине знак $+$ или $-$ так, чтобы любые две соседние вершины (т. е. соединенные отрезком) получили разные знаки. Пусть

$$(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_{k-1}, q_{k-1})$$

набор всех отрезков дерева, ориентированных от положительной вершины к отрицательной. Положим

$$R(D) = \frac{(-1)^{\tau}}{T} \prod_{r=1}^{k} (\gamma_r - 1)!, \tag{5}$$

где T обозначает число симметрий дерева D, γ_r обозначает кратность вершины r и τ обозначает число вершин, снабженных знаком минус и имеющих четную кратность. Тогда можно принять

$$B_k(m_1, \ldots, m_n) = \\ = \sum_D \Big[R(D) \sum_{i_1, \ldots, i_k} m_{i_{p_1} i_{q_1}} m_{i_{p_2} i_{q_2}} \cdots m_{i_{p_{k-1}} i_{q_{k-1}}} (m_{i_{p_1} i_{q_1}} + m_{i_{p_2} i_{q_2}} + \cdots \\ \cdots + m_{i_{p_{k-1}} i_{q_{k-1}}}) \Big] \tag{6}$$

(для сокращения разности $m_i - m_j$ обозначены через m_{ij}; внешнее суммирование производится по всем геометрически различным деревьям D, имеющим k вершин; внутреннее суммирование — по всевозможным упорядоченным наборам k различных чисел, выбранным из совокупности $1, 2, \ldots, n$).

* Значок $\times$ обозначает кронекеровское произведение представлений.

Например,

$$B_2(m_1, \ldots, m_n) = \frac{1}{2} \sum_{i_1 i_2} m_{i_1 i_2}^2; \tag{7}$$

$$B_3(m_1, \ldots, m_n) = \frac{1}{2} \sum_{i_1 i_2 i_3} m_{i_1 i_2} m_{i_1 i_3} (m_{i_2 i_3} + m_{i_1 i_3}). \tag{8}$$

Из (2) и (7)

$$d_2(m_1, \ldots, m_n) = \frac{N}{n(n^2-1)} \sum_{i<j} (r_i - r_j)[2(m_i - m_j) + (r_i - r_j)]. \tag{9}$$

Следовательно, $d_2(\varphi) > 0$ для любого ненулевого представления φ. Используя предложение B, заключаем, что все трехчленные простые подгруппы группы $U(N)$ не гомологичны нулю в $U(N)$. Отсюда легко вывести, что все трехчленные простые подгруппы любой компактной группы Ли $\mathfrak{G}$ не гомологичны нулю в $\mathfrak{G}$.

Действительно, если бы трехчленная простая подгруппа $\mathfrak{G}_0$ была гомологична нулю в $\mathfrak{G}$, то, рассматривая какое-нибудь локально точное унитарное представление φ группы $\mathfrak{G}$, мы получили бы трехчленную простую подгруппу $\varphi(\mathfrak{G}_0)$ группы $U(N)$, гомологичную нулю в $\varphi(\mathfrak{G})$, а следовательно, и в $U(N)$.

Число $d_2(\varphi)$ было введено нами чисто алгебраически в работе [3] под названием индекса представления φ.

Из свойства B и приведенных выше выражений для $d_k(\varphi)$ видно, что, как правило, подгруппа типа $U(n)$ не гомологична нулю в группе $U(N)$. Например, неприводимая подгруппа типа $U(3)$ гомологична нулю в $U(N)$ тогда и только тогда, когда она сопряжена подгруппе, которая содержится в группе всех ортогональных матриц (для этого необходимо и достаточно, чтобы $m_1 - 2m_2 + m_3 = 0$).

Поступило
2 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 6 (48): 3 (1939). [2] H. Weyl, Math. Zs, 23 (1925) (пер. в Усп. матем. наук, 4 (1938)). [3] Е. Б. Дынкин, ДАН, 81, № 6 (1951).