

В. М. ДУБРОВСКИЙ

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФОРМУЛЫ НИКОДИМА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 VI 1952)

Пусть  $\mathfrak{M}$  — множество некоторых элементов и  $\mathfrak{M}$  — семейство подмножеств  $\mathfrak{M}$ , удовлетворяющее следующему условию:  $\mathfrak{M}$  содержит какие угодно разности и конечные или счетные суммы входящих в него множеств, все множество  $\mathfrak{M}$  и пустое множество.

Пусть  $\Phi(\alpha, e)$  — семейство вполне аддитивных функций множества, определенных и конечных для любого  $e \in \mathfrak{M}$ , где  $\alpha$  — параметр, область изменения которого есть некоторое множество  $A$ . Значения  $\Phi(\alpha, e)$  предполагаются вещественными числами. Полная вариация функции  $\Phi(\alpha, e)$  на множестве  $e$  будет обозначаться через  $\mathfrak{F}(\alpha, e)$ . Эта полная вариация, как известно, сама представляет собой вполне аддитивную, конечную функцию множества  $e \in \mathfrak{M}$  ( $\alpha \in A$ ) <sup>(1, 2)</sup>.

Пусть  $S$  — последовательность  $e_1, e_2, \dots$  взаимно не налегающих множеств из семейства  $\mathfrak{M}$ . Если, какова бы ни была такая последовательность  $S$ , величина  $\sup |\Phi(\alpha, e_{n+1} + e_{n+2} + \dots)|$ , где знак  $\sup$  относится ко всем  $\alpha \in A$ , стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , или, что то же самое,  $|\Phi(\alpha, e_{n+1} + e_{n+2} + \dots)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\alpha$ , то можно сказать, что условие полной аддитивности будет выполняться для функции  $\Phi(\alpha, e)$  равномерно относительно  $\alpha$ . Условимся говорить в этом случае, что семейство  $\Phi(\alpha, e)$  обладает свойством равномерной аддитивности.

Свойство равномерной аддитивности семейства  $\Phi(\alpha, e)$  эквивалентно свойству равномерной аддитивности соответствующего семейства полных вариаций  $\mathfrak{F}(\alpha, e)$  <sup>(3, 4)</sup>.

Не предполагая теперь, что для семейства  $\Phi(\alpha, e)$  имеет место свойство равномерной аддитивности, установим меру (или оценку) для степени, в которой аддитивность  $\Phi(\alpha, e)$  неравномерна. Взяв какую-либо последовательность  $S$  взаимно не налегающих множеств  $e_1, e_2, \dots$  ( $e_i \in \mathfrak{M}, i = 1, 2, \dots$ ), рассмотрим величину

$$\delta(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup \mathfrak{F}(\alpha, e_{n+1} + e_{n+2} + \dots)],$$

где знак  $\sup$  относится ко всем  $\alpha \in A$ .

Этот предел (конечный или бесконечный), очевидно, существует. Назовем показателем аддитивности семейства  $\Phi(\alpha, e)$  верхнюю грань (конечную или бесконечную) величины  $\delta(S)$ , соответствующую всевозможным  $S$ , и обозначим его через  $\mathfrak{D}$ . Очевидно, равенство  $\mathfrak{D} = 0$  необходимо и достаточно для того, чтобы семейство  $\Phi(\alpha, e)$  было равномерно аддитивным.

Рассмотрим теперь семейство  $f(\alpha, x)$  функций элемента  $x \in \mathfrak{M}$ . Допустим, что при каждом значении параметра  $\alpha \in A$  функция  $f(\alpha, x)$

измерима относительно  $\mathfrak{M}$  и суммируема относительно некоторой неотрицательной вполне аддитивной функции множества  $M(e)$ , определенной и конечной на семействе  $\mathfrak{M}$ . Значения  $f(\alpha, x)$  суть вещественные числа. В силу этих предположений, каково бы ни было  $\alpha$ ,

$$D(\alpha, N) = \int_{E(\alpha, N)} [|f(\alpha, x)| - N] M(d\mathfrak{A}_x) \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ , где  $E(\alpha, N)$  обозначает (как и в последующем) множество всех элементов  $x \in \mathfrak{A}$ , для которых разность под знаком интеграла положительна;  $N$  — положительное число; интеграл понимается в смысле Лебега — Стильтьеса. Назовем показателем суммируемости семейства  $f(\alpha, x)$  относительно  $M(e)$  величину

$$\Delta = \lim_{N \rightarrow \infty} [\sup D(\alpha, N)],$$

где знак  $\sup$  относится ко всем  $\alpha \in A$ .

Величина  $\Delta$ , очевидно, характеризует степень неравномерности, с которой свойство суммируемости относительно  $M(e)$  выполняется для функций  $f(\alpha, x)$ , соответствующих всевозможным значениям параметра  $\alpha$ . Равенство  $\Delta = 0$  есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы  $D(\alpha, N) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\alpha$ . В последнем случае естественно называть функции  $f(\alpha, x)$  равномерно суммируемыми относительно  $M(e)$ .

Обратимся теперь к формуле Никодима. Так мы будем называть равенство

$$\Phi(\alpha, e) = \int_e f(\alpha, x) M(d\mathfrak{A}_x) \quad (1)$$

( $e \in \mathfrak{M}$ ), где относительно функций  $f(\alpha, x)$  и  $\Phi(\alpha, e)$  будут делаться указанные общие предположения. Интеграл в этом равенстве понимается в смысле Лебега — Стильтьеса; он определяется при помощи базиса  $M(e)$  семейства  $\Phi(\alpha, e)$ , т. е. неотрицательной вполне аддитивной функции множества, определенной и конечной для любого  $e \in \mathfrak{M}$  и обладающей тем свойством, что если для некоторого  $e \in \mathfrak{M}$  имеет место равенство  $M(e) = 0$ , то для этого же  $e$  и любого  $\alpha \in A$  выполняется равенство  $\Phi(\alpha, e) = 0$ . В силу известной теоремы Никодима<sup>(2, 5)</sup>, если равенство (1) рассматривать как интегральное уравнение, в котором  $\Phi(\alpha, e)$  и базис  $M(e)$  для  $\Phi(\alpha, e)$  даны, то это интегральное уравнение всегда разрешимо относительно  $f(\alpha, x)$ .

Задача настоящей работы состоит в установлении в связи с формулой Никодима некоторого инварианта.

*Теорема. Пусть дана вполне аддитивная функция множества  $\Phi(\alpha, e)$ , определенная и равномерно ограниченная в области  $e \in \mathfrak{M}$ ,  $\alpha \in A$ . С изменением базиса  $M(e)$  этой функции в формуле (1) будет, вообще говоря, меняться также функция  $f(\alpha, x)$ . Однако показатель суммируемости  $\Delta$  последней относительно  $M(e)$  будет оставаться неизменным и равным показателю аддитивности  $\mathfrak{D}$  функции  $\Phi(\alpha, e)$ .*

*Доказательство.* Обозначим через  $\mathfrak{G}$  верхнюю грань величины  $\mathfrak{F}(\alpha, \mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}} |f(\alpha, x)| M(d\mathfrak{A}_x)$ , соответствующую всевозможным  $\alpha \in A$ .

Так как, согласно предположению об ограниченности  $\Phi(\alpha, e)$ , эта верхняя грань конечна, то показатель суммируемости  $\Delta$  функции  $f(\alpha, x)$  относительно  $M(e)$  тем более конечен.

Пусть  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  — некоторая монотонно стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел;  $a_1 + a_2 + \dots$  — какой-либо сходящийся ряд с положительными постоянными членами. В силу определения показателя суммируемости можно определить неограниченную монотонно возрастающую последовательность положительных чисел  $N_1, N_2, \dots$ , для которой будут выполняться неравенства

$$\Delta \leq \sup_{E(\alpha, N_n)} \int [|f(\alpha, x)| - N_n] M(d\mathfrak{A}_x) < \Delta + \varepsilon_n, \quad (2)$$

$1/N_n < a_n$ , где знак  $\sup$  соответствует всевозможным  $\alpha \in A$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Из (2) следует, что существует значение  $\alpha_n$  параметра  $\alpha$ , для которого выполняется условие

$$\Delta - \varepsilon_n < \int_{\mathcal{E}_n} [|f(\alpha_n, x)| - N_n] M(d\mathfrak{A}_x) < \Delta + \varepsilon_n, \quad (3)$$

где  $\mathcal{E}_n = E(\alpha_n, N_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Положим  $\mathfrak{F} = \prod_{n=1}^{\infty} (\mathcal{E}_n + \mathcal{E}_{n+1} + \mathcal{E}_{n+2} + \dots)$ .

Как легко видеть,

$$\mathfrak{G} \geq \int_{\mathcal{E}_n} |f(\alpha_n, x)| M(d\mathfrak{A}_x) \geq N_n M(\mathcal{E}_n)$$

( $n = 1, 2, \dots$ ), откуда

$$M(\mathfrak{F}) \leq \mathfrak{G} \sum_{v=n}^{\infty} \frac{1}{N_v} \leq \mathfrak{G} \sum_{v=n}^{\infty} a_v \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и, следовательно,  $M(\mathfrak{F}) = 0$ , так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

Определим теперь последовательность множеств  $e_1, e_2, \dots$ , полагая для каждого натурального  $n$   $e_n = \mathcal{E}_n - (\mathcal{E}_{n+1} + \mathcal{E}_{n+2} + \dots)$ . Как нетрудно убедиться, множества  $e_1, e_2, \dots$  не имеют попарно общих элементов и принадлежат  $\mathfrak{M}$ , причем  $e_n + e_{n+1} + e_{n+2} + \dots = (\mathcal{E}_n + \mathcal{E}_{n+1} + \mathcal{E}_{n+2} + \dots) - \mathfrak{F}$ . Из последнего соотношения следует  $\mathfrak{F}(\alpha, e_n + e_{n+1} + e_{n+2} + \dots) = \mathfrak{F}(\alpha, \mathcal{E}_n + \mathcal{E}_{n+1} + \mathcal{E}_{n+2} + \dots)$ , так как  $\mathfrak{F}(\alpha, \mathfrak{F}) = 0$  в силу равенства  $M(\mathfrak{F}) = 0$  ( $\alpha \in A, n = 1, 2, \dots$ ); откуда, в силу (3),  $\mathfrak{F}(\alpha, e_n + e_{n+1} + e_{n+2} + \dots) \geq \mathfrak{F}(\alpha, \mathcal{E}_n) > \Delta - \varepsilon_n$ . Тем более верно неравенство  $\sup \mathfrak{F}(\alpha, e_n + e_{n+1} + e_{n+2} + \dots) > \Delta - \varepsilon_n$ , где знак  $\sup$  относится ко всем  $\alpha \in A$ , откуда, переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , в силу определения показателя аддитивности  $\mathfrak{D}$  функции  $\mathfrak{F}(\alpha, e)$ , получим  $\mathfrak{D} \geq \Delta$ .

Пусть теперь  $e_1, e_2, \dots$  будет произвольная последовательность взаимно не налегающих множеств ( $e_i \in \mathfrak{M}; i = 1, 2, \dots$ ). Полагая  $r_p = e_{p+1} + e_{p+2} + \dots$ ,  $\rho_p^n = r_p E(\alpha, N_n)$  ( $p = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$ ), будем иметь

$$\mathfrak{F}(\alpha, r_p) = \int_{r_p - \rho_p^n} |f(\alpha, x)| M(d\mathfrak{A}_x) + \int_{\rho_p^n} |f(\alpha, x)| M(d\mathfrak{A}_x).$$

Первый из этих интегралов, очевидно, не превосходит  $N_n M(r_p - \rho_p^n)$ , откуда

$$\mathfrak{F}(\alpha, r_p) \leq N_n M(r_p) + \int_{\rho_p^n} [|f(\alpha, x)| - N_n] M(d\mathfrak{A}_x),$$

и, в силу (2),  $\mathfrak{F}(\alpha, r_p) \leq N_n M(r_p) + \Delta + \varepsilon_n$ .

Последнее неравенство верно для любого  $\alpha \in A$ . Значения индексов  $n$  и  $p$  в нем не зависят друг от друга. Поэтому, заменив в нем левую его часть ее верхней гранью, соответствующей всем  $\alpha \in A$ , и переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$  и при постоянном  $n$ , получим  $\lim_{p \rightarrow \infty} [\sup \mathfrak{F}(\alpha, r_p)] \leq \Delta + \varepsilon_n$ , откуда, приняв во внимание произвольность

последовательности  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  и значения индекса  $n$ , наконец, найдем  $\mathfrak{D} \leq \Delta$ , что в сочетании с полученным ранее соотношением  $\mathfrak{D} \geq \Delta$  позволяет сделать вывод о равенстве  $\mathfrak{D} = \Delta$  показателя аддитивности  $\mathfrak{D}$  функции  $\Phi(\alpha, e)$  и показателя суммируемости  $\Delta$  функции  $f(\alpha, x)$ .

Рассматриваемая теорема, таким образом, доказана. Ее частный случай, когда  $\mathfrak{D} = \Delta = 0$ , был установлен мною ранее (6).

Замечание. Теорема, доказанная в настоящей работе, теряет силу, если отбросить предположение о равномерной ограниченности функции  $\Phi(\alpha, e)$ . Это показывает следующий пример.

Пусть  $x^*$  — определенный элемент множества  $\mathfrak{X}$ .  $M(e) = 1$ , если  $x^* \in e$ , и  $M(e) = 0$ , если  $x^* \in \mathfrak{X} - e$ , каково бы ни было  $e \in \mathfrak{M}$ . Пусть затем функция  $f(\alpha, x)$ , будучи определенной и конечной в любой точке прямоугольника  $\alpha \in A$ ,  $x \in \mathfrak{X}$ , обладает тем свойством, что  $f(\alpha, x^*)$  неограничено при изменении  $\alpha$  на множестве  $A$ . Полагая  $\Phi(\alpha, e) = \int_e f(\alpha, x) M(dx)$ , для любого  $e \in \mathfrak{M}$  будем иметь:  $\Phi(\alpha, e) = f(\alpha, x^*)$ , если  $x^* \in e$ , и  $\Phi(\alpha, e) = 0$ , если  $x^* \in \mathfrak{X} - e$ .

Как нетрудно убедиться, показатель аддитивности функции  $\Phi(\alpha, e)$  равен нулю, в то время как показатель суммируемости функции  $f(\alpha, x)$  относительно базиса  $M(e)$  равен бесконечности.

Поступило  
26 V 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> J. Radon, Sitzungsber. d. Acad. d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., 122, Abt. II-a, 1295 (1913). <sup>2</sup> S. Saks, Theory of the Integral, Warszawa, 1937. <sup>3</sup> В. Дубровский, Матем. сборн., 20 (62): 2, 317 (1947). <sup>4</sup> В. Дубровский, ДАН, 58, № 5, 737 (1947). <sup>5</sup> О. Nikodym, Fund. Math., 15, 131 (1930). <sup>6</sup> В. Дубровский, Изв. АН СССР, 13, 341 (1949).