Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

ПРОБЛЕМА ВЫВОДИМОСТИ В КОНСТРУКТИВНОМ ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ С СИЛЬНЫМ ОТРИЦАНИЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 12 V 1952)

В предыдущем сообщении ([1]) были приведены некоторые теоремы о конструктивном исчислении высказываний с сильным отрицанием. В настоящей заметке дается алгорифм, позволяющий выявлять выводимые в этом исчислении формулы и отличать их таким образом от невыводимых. Обозначения и терминология заметки ([1]) предполагаются известными.

Так как всякая формула конструктивного исчисления высказываний с сильным отрицанием („исчисления Π^+") эквивалентна конъюнкции вполне приведенных формул, а всякая конъюкция, в свою очередь, выводима тогда и только тогда, когда выводим каждый ее конъюнктивный член, то для решения в исчислении Π^+ проблемы выводимости достаточно построить алгорифм выводимости для вполне приведенных формул.

В заметке ([1]) было установлено, что выводимость в Π^+ вполне приведенной формулы равносильна выводимости сопряженного ей вполне приведенного заключения. Поэтому для наших целей достаточно указать алгорифм, отличающий выводимые вполне приведенные заключения от невыводимых.

Все встречающиеся далее выводы в заключениях предполагаются несократимыми.

Теорема 1. *В выводе вполне приведенного заключения не могут применяться схемы* ПС, КП, КС, ОП *и* ОС, *а схема* ИП:

$$\frac{\pi_1 \vdash R_1 \quad R_2\,\pi_2 \vdash S}{(R_1 \supset R_2)\,\overset{*}{\pi_1}\,\overset{*}{\pi_2} \vdash S}\,\text{ИП} \tag{1}$$

применяется лишь в том случае, когда формула R_1 не является дизъюнкцией.

Назовем схему ИП (1) особенной, если одновременно:

а) формула R_1 является формульной переменной или ее сильным отрицанием,

б) формула $(R_1 \supset R_2)$ является членом π_1.

Теорема 2. *Если $\mathfrak{A}$ — выводимое приведенное заключение, то можно построить такой вывод $\mathfrak{A}$, в котором нет особенных схем* ИП, *а всякая схема* СО *применяется только к исходным заключениям.*

В соответствии с этой теоремой далее можно будет ограничиться рассмотрением выводов без особенных схем ИП, и притом таких, что схема СО в этих выводах будет применяться только к исходным заключениям.

Приведем несколько лемм, существенных для алгорифма выводимости заключений.

Лемма 1. *Заключение*

$$((P \supset Q) \supset R)\,\pi \vdash (P \supset Q)$$

выводимо или нет одновременно с заключением

$$P\,(Q \supset R)^{*}\,\pi^{*} \vdash Q.$$

Лемма 2. *Заключение*

$$((P \vee Q) \supset R)\,\pi \vdash S$$

выводимо или нет одновременно с заключением

$$(P \supset R)\,(Q \supset R)^{*}\,\pi^{*} \vdash S.$$

Лемма 3. *Заключение*

$$Q\,(P \supset Q)\,\pi \vdash S$$

выводимо или нет одновременно с заключением

$$Q\pi \vdash S.$$

Лемма 4. *Заключение*

$$P\,(P \vee Q)\,\pi \vdash S$$

выводимо или нет одновременно с заключением

$$P\pi \vdash S.$$

Число вхождений всех формульных переменных и всех логических знаков в формулу P будем называть формульной длиной P и обозначать через $\varphi[P]$. Пусть $\mathfrak{A} = P_1 \ldots P_k \vdash Q$ — некоторое заключение. Число

$$2^{\varphi[Q]} + \sum_{i=1}^{k} 2^{\varphi[P_i]}$$

назовем характеристикой заключения $\mathfrak{A}$ и обозначим через $\chi[\mathfrak{A}]$

Алгорифм выводимости вполне приведенных заключений будет состоять в сведении вопроса о выводимости некоторого приведенного заключения к вопросу о выводимости других вполне приведенных заключений меньшей характеристики. Выводимость же заключений с достаточно маленькими характеристиками может быть установлена или опровергнута непосредственно. В самом деле, вполне приведенные заключения, характеристики которых не превосходят 4, могут быть одного из следующих четырех типов: $\vdash A$, $\vdash \sim A$, $A \vdash A$, $A \vdash B$ (A и B — различные формульные переменные). Здесь заключение $A \vdash A$ выводимо, а остальные нет.

Пусть мы уже умеем узнавать о выводимости заключений, характеристики которых меньше n. Рассмотрим некоторое заключение $\mathfrak{A}$, для которого $\chi[\mathfrak{A}] = n$.

Если заключение $\mathfrak{A}$ исходное, то оно выводимо очевидным образом. Пусть заключение $\mathfrak{A}$ отлично от исходного. Выпишем все допустимые схемы, нижним заключением которых может являться $\mathfrak{A}$. (При этом из схем ПП выписываются только те, у которых верхнее заключение отлично от нижнего.) Так как, очевидно, члены верхних заключений допустимой схемы являются подформулами членов нижнего ее заключения, допустимых схем с нижним заключением $\mathfrak{A}$ может быть лишь конечное число. Пусть это будут схемы

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \ldots, \frac{\mathfrak{A}_k}{\mathfrak{A}}, \frac{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}}, \ldots, \frac{\mathfrak{B}_l \mathfrak{C}_l}{\mathfrak{A}}. \tag{2}$$

Для доказательства выводимости заключения $\mathfrak{A}$, очевидно, необходимо и достаточно установить выводимость хотя бы одного из заключений $\mathfrak{A}_i$ или хотя бы одной пары заключений $\mathfrak{B}_i$ и $\mathfrak{C}_i$.

Нетрудно проверить, что верхнее заключение каждой из схем ПП, ИС, ДС и СО имеет меньшую характеристику, чем нижнее заключение этой схемы. То же справедливо и для схемы ИП (1) и для схемы ДП:

$$\frac{R_1\pi_1 \vdash S \quad R_2\pi_2 \vdash S}{(R_1 \vee R_2)\pi_1^*\pi_2^* \vdash S}\text{ДП}, \tag{3}$$

если формула $(R_1 \supset R_2)$ (соответственно, в случае схемы ДП (3) — формула $(R_1 \vee R_2)$) не является членом ни π_1, ни π_2.

Разберем оставшиеся случаи.

Пусть сначала

$$\frac{\mathfrak{B}_i \quad \mathfrak{C}_i}{\mathfrak{A}} \tag{4}$$

есть схема (1). Если $(R_1 \supset R_2)$ есть член π_1, то (так как особенные схемы из рассмотрения исключены, а формула R_1 не может быть дизъюнкцией) формула R_1 есть импликация. Положим $R_1 = (R_{11} \supset R_{12})$. Тогда

$$\mathfrak{B}_i = ((R_{11} \supset R_{12}) \supset R_2)\pi_{11} \vdash (R_{11} \supset R_{12}).$$

По лемме 1, $\mathfrak{B}_i$ выводимо или нет одновременно с заключением

$$\mathfrak{B}_i' = R_{11}(R_{12} \supset R_2)^*\pi_{11}^* \vdash R_{12}.$$

При этом, как нетрудно убедиться, $\chi[\mathfrak{B}_i'] < n$. Если формула R_{12} не является дизъюнкцией, то заключение $\mathfrak{B}_i'$ вполне приведенное, и случай исчерпан. Пусть R_{12} есть дизъюнкция: $R_{12} = (\ldots(R_{121} \vee R_{122}) \vee \ldots \vee R_{12r})$, причем формулы $R_{121}, R_{122}, \ldots, R_{12r}$ дизъюнкциями не являются. Тогда заключение $\mathfrak{B}_i'$ вполне приведенным не является, однако, по лемме 2, оно выводимо или нет одновременно с вполне приведенным заключением

$$\mathfrak{B}_i'' = R_{11}(R_{121} \supset R_2)^*(R_{122} \supset R_2)^* \ldots (R_{12r} \supset R_2)^*\pi_{11}^* \vdash R_{12},$$

а

$$\chi[\mathfrak{B}_i''] < n.$$

Значит, выводимость или невыводимость $\mathfrak{B}_i$ на основании индуктивного предположения может быть установлена.

Переходим к заключению $\mathfrak{C}_i$. Если $(R_1 \supset R_2)$ не есть член π_2, то $\chi[\mathfrak{C}_i] < n$, и вопрос решен. Пусть поэтому $(R_1 \supset R_2)$ является членом π_2. Тогда $\mathfrak{C}_i$ имеет вид

$$R_2(R_1 \supset R_2)\pi_{21} \vdash S,$$

и, следовательно, по лемме 3 выводимо или нет одновременно с заключением

$$\mathfrak{C}_i' = R_2\pi_{21} \vdash S.$$

Нам остается отметить, что заключение $\mathfrak{C}_i'$ вполне приведенное, и $\chi[\mathfrak{C}_i'] < n$.

Пусть теперь (4) есть схема (3). Нетривиальным здесь является случай, когда $(R_1 \vee R_2)$ является членом π_1 или π_2. Этот случай исчерпывается ссылкой на лемму 4 подобно тому, как это делалось выше.

Таким образом выяснение выводимости вполне приведенного заключения $\mathfrak{A}$ действительно сводится к выяснению выводимости вполне приведенных заключений меньших характеристик.

Этим требуемый алгорифм построен.

Так как всякая формула обычного конструктивного исчисления высказываний («исчисления II») выводима в исчислении II^+ тогда и только тогда, когда она выводима в исчислении II, построенный алгорифм позволяет решать вопрос о выводимости формул и в исчислении II. Таким образом указанный алгорифм может быть применен к задаче, решаемой алгорифмами, построенными Генценом ([2]) и Б. Ю. Пильчак ([3]).

В качестве примера применения этого алгорифма докажем невыводимость в II_+ эквивалентности $(\neg A \equiv \sim A)$. Очевидно, для этого достаточно до казать невыводимость в II^+ формулы

$$(\neg A \supset \sim A). \tag{5}$$

Вполне приведенной формулой, эквивалентной (5), является

$$((A \supset \sim A) \supset \sim A), \tag{6}$$

а заключением, сопряженным формуле (6),

$$(A \supset \sim A) \vdash \sim A. \tag{7}$$

Заключение (7) может быть получено в выводе лишь по схеме ПП или по схеме ИП. При этом левое верхнее заключение схемы ИП не может иметь посылок (в противном случае эта схема была бы особенной). Значит, последовательность (2) имеет вид

$$\frac{\vdash \sim A}{(A \supset \sim A) \vdash \sim A}\ \text{ПП}, \qquad \frac{\vdash A \quad \sim A \vdash \sim A}{(A \supset \sim A) \vdash \sim A}\ \text{ИП}, \qquad \frac{\vdash A \quad \sim A\,(A \supset \sim A) \vdash \sim A}{(A \supset \sim A) \vdash \sim A}\ \text{ИП}.$$

Так как ни заключение $\vdash \sim A$, ни $\vdash A$ невыводимы, то невыводимо и заключение (7), а потому и формула $(\neg A \equiv \sim A)$.

Поступило
9 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Воробьев, ДАН, 85, № 3 (1952). [2] G. Gentzen, Math. Zs., 39, 176, 405 (1934/1935). [3] Б. Ю. Пильчак, ДАН, 75, № 6, 773 (1950).