Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

В. Г. ВИНОКУРОВ

О БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ЗАДАННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 V 1952)

Во всем дальнейшем E есть сепарабельное пространство Банаха. Последовательность $\{z_i\}$ называется полной в E, если замкнутая линейная оболочка над $\{z_i\}$ совпадает с E. Биортогональная система $\{z_i\}$, $\{F_i\}$ называется полной в E, если последовательность $\{z_i\}$ полна в E, а последовательность $\{F_i\}$ тотальна на E ([1]).

Пусть P — подпространство E. Подпространство Q называется прямым дополнением к P, если $P \cap Q = \theta$, а прямая сумма P и Q равна E. Подпространство Q называется квази-дополнением к P, если $P \cap Q = \theta$, а замыкание прямой суммы P и Q равно E.

§ 1. Мы будем говорить, что полная в E биортогональная система $\{z_i\}$, $\{F_i\}$ проходит через подпространство P, если замкнутая линейная оболочка над теми z_i, которые принадлежат P, совпадает с P. Легко видеть, что эти z_i вместе с соответствующими им функционалами из $\{F_i\}$ образуют биортогональную систему, полную в P.

Теорема 1. *Пусть P и Q — подпространства E, являющиеся квази-дополнениями друг другу. Существует полная в E биортогональная система $\{z_i\}$, $\{F_i\}$, проходящая через P и через Q.*

Мы будем говорить, что базис $\{z_i\}$ проходит через подпространство P, если оно содержит подпоследовательность, содержащуюся в P и являющуюся базисом P.

Теорема 2. *Пусть P — подпространство E и $\{z_i\}$ — базис в E, проходящий через P. Если P имеет прямое дополнение Q, то существует базис $\{z_i^*\}$, проходящий через Q и через P и совпадающий на P с $\{z_i\}$.*

§ 2. Пусть P и Q — неконечномерные подпространства, являющиеся квази-дополнениями друг к другу. На основании теоремы 1 существует такая полная в E биортогональная система $\{z_i\}$, $\{F_i\}$, что замкнутые линейные оболочки над $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, где $x_i = z_{2i-1}$, $y_i = z_{2i}$, $i = 1, \ldots, \infty$, совпадают, соответственно, с P и Q. Рассмотрим последовательность $\{\alpha_i x_i + \beta_i y_i\}$, где α_i и β_i — произвольные, но фиксированные числа, причем для каждого i по крайней мере одно из чисел α_i, β_i не равно нулю. Мы будем обозначать замкнутую линейную оболочку над $\{\alpha_i x_i + \beta_i y_i\}$ через $R(\alpha_i, \beta_i)$.

Теорема 3. А. *Если $\beta_i \neq 0$ для всех i, то $R(\alpha_i, \beta_i)$ есть квази-дополнение к P; если $\alpha_i \neq 0$ для всех i, то $R(\alpha_i, \beta_i)$ есть квази-дополнение к Q.*

Б. *Пусть P и Q — прямые дополнения в E и $\beta_i \neq 0$ для всех i. Для того чтобы $R(\alpha_i, \beta_i)$ было прямым дополнением к P, необхо-*

димо и достаточно, чтобы существовало линейное отображение Q в P, переводящее $\{\beta_i y_i\}$ в $\{\alpha_i x_i\}$.

В. *Пусть P и Q — прямые дополнения в E и $\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0$ для всех i. Для того чтобы $R(\alpha_i, \beta_i)$ было прямым дополнением и к P и к Q, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный изоморфизм между P и Q, переводящий $\{\alpha_i x_i\}$ в $\{\beta_i y_i\}$.*

Положим $z'_{2i-1} = x_i$, $z'_{2i} = \alpha_i x_i + \beta_i y_i$, $i = 1, \ldots, \infty$.

Теорема 4. *Пусть $|\alpha_i| \leqslant A$, $|\beta_i| \geqslant \beta > 0$ для всех i. Если последовательность $\{z_i\}$ есть базис в E, то и последовательность $\{z'_i\}$ есть базис в E.*

В [2] нами было доказано, что если P и Q — подпространства E и $P \cap Q = \theta$, то существует квази-дополнение R к P, содержащее Q. С помощью этого результата и теорем 1 и 3 А можно доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть P и Q — подпространства E и $P \cap Q = \theta$. Если P не конечномерно, то существует квази-дополнение R к P такое, что $R \cap Q = \theta$.*

§ 3. Если последовательность $\{z_i\}$ есть базис, то любой элемент $z \in E$ представим в виде $z = \sum\limits_1^\infty F_i(z) z_i$, где $\{F_i\}$ — последовательность линейных функционалов, образующая с $\{z_i\}$ биортогональную систему [1]. Базис $\{z_i\}$ называется абсолютным, если ряд $\sum\limits_1^\infty |F_i(z) F(z_i)|$ сходится для любого $z \in E$ и любого линейного функционала F, определенного на E [3].

Нетрудно показать, что для того, чтобы базис $\{z_i\}$ был абсолютным, необходимо и достаточно, чтобы любая перестановка порядка его элементов сохраняла свойство $\{z_i\}$ быть базисом. Мы будем говорить, что неабсолютный базис $\{z_i\}$ есть базис с одним разрывом абсолютности, если $\{z_i\}$ есть объединение двух подпоследовательностей $\{z_{n'_i}\}$ и $\{z_{n''_i}\}$, каждая из которых есть абсолютный базис в замкнутой линейной оболочке над нею самой.

Пусть $\{z_{n'_i}\}$ есть подпоследовательность $\{z_i\}$. Мы будем говорить, что перестановка элементов $\{z_{n'_i}\}$ есть часть перестановки элементов $\{z_i\}$, если при перестановке $\{z_i\}$ каждый элемент из $\{z_{n'_i}\}$ получает тот же номер, что и при перестановке $\{z_i\}$. Мы будем называть разрыв абсолютности базиса простым, если каждая перестановка хотя бы одной из подпоследовательностей $\{z_{n'_i}\}$ и $\{z_{n''_i}\}$ есть часть некоторой перестановки последовательности $\{z_i\}$, сохраняющей свойство $\{z_i\}$ быть базисом.

Пусть, для определенности, $\{z_{n''_i}\}$ — подпоследовательность с указанным в определении простого разрыва свойством. Обозначим замкнутую линейную оболочку над $\{z_{n'_i}\}$ через P. Из теоремы 2 вытекает тогда следующее утверждение.

Пусть $\{z_i\}$ — неабсолютный базис в E с одним простым разрывом абсолютности. Если P имеет прямое дополнение, то в E существует абсолютный базис.

При помощи теорем 4 и 3 Б и В можно построить примеры неабсолютных базисов с одним простым разрывом абсолютности в пространствах, в которых существуют абсолютные базисы, удовлетворяющие следующему условию: абсолютный базис есть объединение двух подпоследовательностей $\{z_{n_i'}\}$ и $\{z_{n_i''}\}$ таких, что если P и Q — соответственно замкнутые линейные оболочки над ними, то не существует линейного изоморфизма между P и Q, переводящего $\{z_{n_i'}\}$ в $\{z_{n_i''}\}$.

В этом случае базис $\{z_i'\}$, построенный на основании теоремы 4, будет неабсолютным базисом с одним простым разрывом абсолютности.

Легко указать пространства, в которых существуют абсолютные базисы, удовлетворяющие указанному условию.

Среднеазиатский государственный университет

Поступило 27 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932. [2] В. Г. Винокуров, ДАН, 81, № 3 (1951). [3] М. М. Гринблюм, ДАН, 49, № 7 (1945).