Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 3

ГЕОФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР М. А. ВЕЛИКАНОВ

ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОЙ ЧАСТИЦЫ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Уточнение и развитие наших теоретических представлений о механизме движения взвешенных наносов требует решения одной вспомогательной задачи: об относительном движении твердой частицы в жидкости. До сих пор мы принимаем, в качестве первого приближения, что продольная скорость твердой частицы не отличается от продольной скорости прилегающей к ней массы жидкости:

$$u_s = u, \tag{1}$$

а поперечная компонента отличается от соответственной компоненты для жидкости на скорость собственного падения частицы в стоячей воде:

$$v_s = v - w. \tag{2}$$

Но из элементарных представлений о силах инерции, очевидно бо́льших для твердых частиц, чем для жидких, следует, что изменения скоростей для них должны быть различны, и разница будет тем больше, чем тяжелее частица и чем быстрее изменяется скорость жидкости. Иными словами, влияние сил инерции будет больше для высоких частот спектра пульсации скоростей, чем для низких, и для бо́льших гидравлических крупностей, чем для меньших.

Решение поставленной задачи мы ограничим плоским и равномерным движением жидкости, а в отношении твердой частицы примем, что ее сопротивление относительному движению пропорционально первой степени относительной скорости, что, конечно, отчасти сужает решение применимостью его лишь к частицам малой крупности.

Выделим в движущейся жидкости в некоторый момент времени произвольную частицу достаточно малого размера и — в интересах простоты — примем ее форму шарообразной. Чтобы отвлечься от деформации этой частицы в процессе ее движения, воспользуемся «принципом отвердения» и будем считать, что частица двигается как твердое тело, но что ее траектория и изменения ее скорости в точности соответствуют движению самой жидкости в той же «точке». Последнее допущение является, конечно, приближенным, но отмечу, что при экспериментальных измерениях оно всегда молчаливо принимается и что без отождествления движения, например, шарика эмульсии, введенной в поток в целях его визуализации, с движением вытесненной им жидкости, мы вообще лишаемся права применить наиболее совершенный метод экспериментального изучения скоростного поля потока: фото- и кинометод, который именно на этом отождествлении и основан.

Напишем для нашей «затвердевшей» шарообразной и весьма малой частицы уравнение изменения количества движения в виде:

$$\frac{d}{dt}(\rho\omega\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

(ω — объем, равный $\pi d^3/6$, а $\mathbf{F}$ — вектор суммы всех действующих на частицу сил).

Если мы теперь мысленно заменим нашу затвердевшую жидкую частицу твердой с плотностью ρ_s, то на изменение количества движения этой твердой частицы будут влиять следующие силы: 1) сумма тех же сил, которые обусловливали движение жидкой частицы; 2) добавочная сила тяжести, вызванная разностью плотностей $\mathbf{g}(\rho_s - \rho)$, и 3) сила сопротивления, вызванная разностью скоростей $\varepsilon(\mathbf{v}_s - \mathbf{v})$, где ε — коэффициент пропорциональности, равный, по Стоксу, $3\pi\mu d$.

Отсюда непосредственно вытекает наше основное уравнение:

$$\frac{d}{dt}\{\rho_s\omega\mathbf{v}_s - \rho\omega\mathbf{v}\} = -\varepsilon(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}) + \mathbf{g}\omega(\rho_s - \rho), \tag{3}$$

а после деления на $(\rho\omega)$ и введения сокращенного обозначения $a \equiv \rho_s/\rho - 1$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathbf{v}_s - \frac{\mathbf{v}}{a+1}\right\} = -\frac{\varepsilon}{\rho\omega(a+1)} + \frac{a\mathbf{g}}{a+1}.$$

Множитель в первом слагаемом правой части легко преобразуется на основе принятия закона Стокса. Имеем: $\varepsilon = 3\pi\mu d$, $\omega = \pi d^3/6$, а скорость собственного падения шара в неподвижной жидкости равна $w = agd^2/18\nu$. Отсюда получаем:

$$\frac{\varepsilon}{\rho\omega(a+1)} = \frac{ag}{(a+1)w} \equiv b. \tag{4}$$

Переходя к проекциям скоростей и вводя новые переменные

$$p = u_s - \frac{u}{a+1}, \quad q = v_s - \frac{v}{a+1}, \tag{5}$$

мы приходим к окончательной форме наших основных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + bp &= \frac{ab}{a+1}u + bw\sin\alpha, \\ \frac{dq}{dt} + bq &= \frac{ab}{a+1}v - bw\cos\alpha \end{aligned} \tag{6}$$

(α — угол наклона поверхности потока 1 к горизонту).

Решение уравнений (6) для мгновенных скоростей возможно лишь путем некоторой схематизации явления. А именно, мы предположим, что изменение скоростей во времени очень велико по сравнению с их пространственным изменением *. Представим теперь кривые пульсации скоростей разложенными по частотам, кратным некоторой минимальной частоте ω, в виде рядов Фурье:

$$u = \bar{u} + \sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n e^{in\omega t}, \quad v = \bar{v} + \sum_{-\infty}^{+\infty}\beta_n e^{in\omega t} \tag{7}$$

* Это допущение равносильно пренебрежению конвективными членами в обычном разложении $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$.

(α_n и β_n — комплексные величины, сопряженные с α_{-n} и β_{-n}; черта сверху — осреднение).

Высказанное упрощающее положение позволяет нам и величины p и q считать функциями только времени и решать уравнения (6) как обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общее решение уравнений типа $\frac{d\varphi}{dt} + b\varphi = f(t)$ гласит, как известно, $\varphi = e^{-bt}\int f(t)\,e^{bt}\,dt + Ce^{-bt}$. Но так как по условиям задачи мы имеем дело с незатухающими колебаниями, то второе слагаемое правой части должно быть равно нулю, т. е. $C = 0$.

Применяя это решение к каждому из уравнений (6), будем иметь:

$$p = \frac{a\bar{u}}{a+1} + \frac{ab}{a+1}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha_n e^{in\omega t}}{b + in\omega} + w\sin\alpha,$$

$$q = \frac{b\bar{v}}{a+1} + \frac{ab}{a+1}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta_n e^{in\omega t}}{b + in\omega} - w\cos\alpha,$$

а после подстановки значений p и q из (5), элементарных операций и умножения под знаком суммы числителя и знаменателя на $b - in\omega$ будем иметь:

$$u_s = \bar{u} + \frac{1}{a+1}\sum_{-n_1}^{+n_1}\alpha_n e^{in\omega t} + \frac{ab^2}{a+1}\sum_{-n_1}^{+n_1}\frac{\alpha_n e^{in\omega t}}{b^2 + n^2\omega^2} - \frac{ab}{a+1}\sum_{-n_1}^{+n_1}\frac{in\omega\alpha_n e^{in\omega t}}{b^2 + n^2\omega^2} + w\sin\alpha,$$

$$v_s = \bar{v} + \frac{1}{a+1}\sum_{-n_1}^{+n_1}\beta_n e^{in\omega t} + \frac{ab^2}{a+1}\sum_{-n_1}^{+n_1}\frac{\beta_n e^{in\omega t}}{b^2 + n^2\omega^2} - \frac{ab}{a+1}\sum_{-n_1}^{+n_1}\frac{in\omega\beta_n e^{in\omega t}}{b^2 + n^2\omega^2} \tag{8}$$

(здесь мы суммируем лишь до наибольшего значения n, обозначенного через n_1).

Эти равенства допускают значительное упрощение для **не очень больших частот**, когда выполняется условие $b = ag/(a+1)w \gg n_1\omega$.

Легко убедиться простой прикидкой, что даже для сравнительно крупных наносов, для которых, например, $w = 10$ см/сек, левая часть неравенства имеет порядок 60 сек$^{-1}$, а частота (в водном потоке) обычно значительно меньше. Тогда мы имеем право приравнять под знаком суммы $b^2 + n^2\omega^2 \approx b^2$. После этого, заменяя $\Sigma\alpha_n e^{in\omega t} = u'$, $\Sigma in\omega\alpha_n e^{in\omega t} = \frac{du'}{dt}$, $\Sigma\beta_n e^{in\omega t} = v'$, $\Sigma in\omega\beta_n e^{in\omega t} = \frac{dv'}{dt}$, получаем:

$$u_s = \bar{u} + w\sin\alpha + u' - \frac{w}{g}\frac{du'}{dt},$$
$$v_s = \bar{v} - w\cos\alpha + v' - \frac{w}{g}\frac{dv'}{dt}. \tag{9}$$

Наконец, разделяя скорости твердой частицы также на осредненные и пульсационные значения и используя самоочевидные зависимости между осредненными значениями твердой и жидкой фаз $\bar{u}_s = \bar{u} + w\sin\alpha$, $\bar{v}_s = \bar{v} - w\cos\alpha$, получим:

$$u'_s = u' - \frac{w}{g}\frac{du'}{dt}, \quad v'_s = v' - \frac{w}{g}\frac{dv'}{dt}. \tag{10}$$

Из полученных равенств можно вывести выражение и для трех характеристик пульсации скоростей тяжелой частицы $\overline{u_s'^2}$, $\overline{v_s'^2}$, $\overline{u_s' v_s'}$. Действительно, возводя в квадрат, или перемножая, и осредняя, будем иметь:

$$\overline{u_s'^2} = \overline{u'^2} - \frac{w}{g}\frac{d}{dt}\left(\overline{u'^2}\right) + \frac{w^2}{g^2}\overline{\left(\frac{du'}{dt}\right)^2},$$

$$\overline{v_s'^2} = \overline{v'^2} - \frac{w}{g}\frac{d}{dt}\left(\overline{v'^2}\right) + \frac{w^2}{g^2}\overline{\left(\frac{dv'}{dt}\right)^2},$$

$$\overline{u_s' v_s'} = \overline{u' v'} - \frac{w}{g}\frac{d}{dt}\left(\overline{u'v'}\right) + \frac{w^2}{g^2}\overline{\left(\frac{du'}{dt}\right)\left(\frac{dv'}{dt}\right)}.$$

Но вторые слагаемые правых частей во всех трех равенствах после осреднения будут, очевидно, равны нулю. Кроме того, естественно считать, что убыванию u' соответствует возрастание v', и наоборот; следовательно: $\overline{\frac{du'}{dt}} \cdot \overline{\frac{dv'}{dt}} < 0$. Окончательно соотношения между характеристиками пульсации скоростей твердой и жидкой фаз напишутся в виде:

$$\overline{u_s'^2} = \overline{u'^2} + \frac{w^2}{g^2}\overline{\left(\frac{du'}{dt}\right)^2}, \quad \overline{v_s'^2} = \overline{v'^2} + \frac{w^2}{g^2}\overline{\left(\frac{dv'}{dt}\right)^2}, \tag{11}$$

$$\overline{u_s' v_s'} = \overline{u' v'} - \frac{w^2}{g^2}\left|\overline{\frac{du'}{dt}\frac{dv'}{dt}}\right|.$$

Полученные мною зависимости (10) и (11), конечно, надо считать приближенными, главным образом, потому, что при интегрировании уравнения (6) я опускаю конвективные члены (что, впрочем, в гидродинамике иногда неизбежно: мы умеем интегрировать лишь «линеаризированные» уравнения). Далее, мое решение ограничено, во-первых, линейным сопротивлением (по Стоксу) и, во-вторых, малой концентрацией твердых частиц, поскольку влиянием движения одной частицы на другую я пренебрегаю. Должен сказать, что и оба эти ограничения на настоящем этапе науки также неизбежны, и более строгого и более общего решения придется вероятно долго ждать. В настоящий же момент и это, приближенное и ограниченное, решение имеет несомненную ценность, хотя бы в том отношении, что все полученные мною поправочные члены, уточняющие первоначальные равенства (1) и (2), оказываются настолько малыми, что мы в практических расчетах вправе от них отказаться.

Для построения теории движения взвешенных наносов и этот качественный результат имеет значение.

Поступило
27 V 1952