Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

ФИЗИКА

Н. С. ФАСТОВ

К УРАВНЕНИЯМ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

(Представлено академиком И. П. Бардиным 12 IV 1952)

Для пластической деформации с учетом изменения температуры принимаются следующие положения (1):

1) относительное изменение объема состоит из упругой объемной деформации и теплового расширения

$$\sigma_{ll} = 3K\varepsilon_{ll} - 3\alpha K (T - T_0); \tag{1}$$

2) девиатор напряжений D_σ пропорционален девиатору деформации D_ε

$$D_\sigma = \psi D_\varepsilon,$$

или, в составляющих:

$$\sigma_{ik} - {}^1/_3\sigma_{ll}\delta_{ik} = \psi(\varepsilon_{ik} - {}^1/_3\varepsilon_{ll}\delta_{ik}), \tag{2}$$

где σ_{ik} — тензор напряжений; ε_{ik} — тензор деформаций; $\varepsilon_{ll} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$; $\sigma_{ll} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$; δ_{ik} — единичный тензор; K — модуль равномерного всестороннего сжатия; α — коэффициент теплового расширения; T — температура тела; T_0 — начальная температура тела, которая принимается постоянной.

При этом предполагается, что величина ψ является функцией инвариантов, построенных из тензора деформаций, и не зависит от температуры. Предположение о независимости величины ψ от температуры появилось благодаря аналогии с упругими деформациями, когда ψ равна удвоенному значению модуля сдвига $\psi = 2\mu$. Но, как известно, если упругие деформации сопровождаются изменением температуры, то модуль сдвига μ в приближении идеальной упругости (закона Гука) следует считать постоянным.

Однако такое предположение не отражает действительного положения и, как будет здесь показано, если пластическая деформация сопровождается изменением температуры, то в уравнении (2) ψ является функцией температуры.

Тело деформируется пластически, если интенсивность деформаций сдвига Γ превосходит определенную величину Γ_0, соответствующую пределу текучести:

$$\Gamma = \sqrt{{}^2/_3}\sqrt{\varepsilon_{ik}^2 - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + 6\varepsilon_{xy}^2 + 6\varepsilon_{xz}^2 + 6\varepsilon_{yz}^2}.$$

При $\Gamma < \Gamma_0$ деформации упругие.

Свободная энергия единицы объема однородного и изотопного пластически деформированного тела $F_{\text{пл}}$ является функцией инвариантных величин, характеризующих объемные деформации ε_{ll} и деформации сдвига Γ, а также температуры [2]:

$$F_{\text{пл}} = F_{\text{пл}}(\varepsilon_{ll},\ \Gamma,\ T). \tag{3}$$

При этом под $F_{\text{пл}}$ мы будем понимать величину, которая при переходе из области пластических в область упругих деформаций переходит в свободную энергию упруго-деформированного тела $F_{\text{упр}}$. Такая оговорка необходима ввиду необратимости пластического деформирования. $F_{\text{пл}}$ имеет смысл только в случае однозначного соответствия между напряжениями и деформациями, т. е. в случае нагрузки [3]. Кроме того, мы ограничимся линейным упрочнением.

Для изотермических деформаций $F_{\text{пл}}$ равна работе $W_{\text{пл}}$, произведенной над телом внешними силами. Разложение $W_{\text{пл}}$ в ряд до членов второго порядка, что соответствует линейному упрочнению, дает

$$W_{\text{пл}} = -\sigma_s^{02}\frac{\mu-\beta}{6\mu^2} + \sigma_s^0\frac{\mu-\beta}{\mu}\Gamma + \frac{3}{2}\beta\Gamma^2 + \frac{K}{2}\varepsilon_{ll}^2, \tag{4}$$

где σ_s^0 — предел текучести на растяжение (изотермический); β — коэффициент упрочнения. В отсутствие упрочнения $\beta = 0$.

Для неизотермических деформаций разложение $F_{\text{пл}}$ в ряд до членов второго порядка малости будет содержать, помимо членов, входящих в (4), еще и произведения изменения температуры на тензорные инварианты первого порядка малости ε_{ll} и Γ:

$$\Gamma_{\text{пл}} = A(T) - \sigma_s^{02}\frac{\mu-\beta}{6\mu^2} + \sigma_s^0\frac{\mu-\beta}{\mu}\Gamma + \frac{3}{2}\beta\Gamma^2 + \frac{K}{2}\varepsilon_{ll}^2 +$$

$$+ a_1(T-T_0)\varepsilon_{ll} + a_2(T-T_0)\Gamma, \tag{5}$$

где a_1 и a_2 — постоянные, $A(T)$ — некоторая функция температуры.

Все постоянные в (5): σ_s^0, μ, K, β, α_1, α_2 следует считать не зависящими от температуры. Учет зависимости этих постоянных от T привел бы к членам более высокого порядка малости, и выражение (5) было бы несправедливо. Из (5) получаем

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F_{\text{пл}}}{\partial \varepsilon_{ik}} = \left[2\beta + \frac{2}{3}\,\frac{\sigma_s^0\frac{\mu-\beta}{\mu} + a_2(T-T_0)}{\Gamma}\right]\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right) +$$

$$+ K\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + a_1(T-T_0)\delta_{ik}. \tag{6}$$

Сравнение (6) с (1) дает

$$a_1 = -\alpha K.$$

Из (6) находим интенсивность скалывающих напряжений S:

$$S = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\sigma_{ik}^2 - \frac{1}{3}\sigma_{ll}^2} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx}-\sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{xz}^2 = 6\sigma_{yz}^2} =$$

$$= \sigma_s^0\frac{\mu-\beta}{\mu} + a_2(T-T_0) + 3\beta\Gamma = \sigma_s\frac{\mu-\beta}{\mu} + 3\beta\Gamma, \tag{7}$$

где

$$\sigma_s = \sigma_s^0\left[1 + \frac{a_2\mu(T-T_0)}{\sigma_s^0(\mu-\beta)}\right] = \sigma_s^0[1 - \lambda(T-T_0)]. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что если пластическому деформированию сопутствует изменение температуры, то интенсивность скалывающих напряжений является линейной функцией температуры и линейной функцией интенсивности деформаций сдвига (для линейного упрочнения).

Поэтому учет температурных изменений при пластическом деформировании эквивалентен учету теплового расширения и линейной зависимости предела текучести от температуры. Температурная зависимость модулей упругости K и μ, а также коэффициентов упрочнения β и теплового расширения α при этом должна не учитываться.

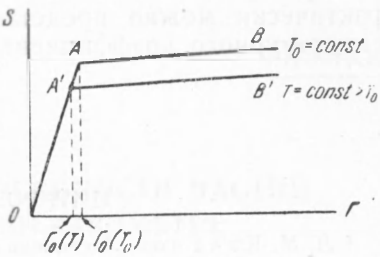

Рис. 1

Постоянная λ в (8) для большинства металлов порядка 10^{-3} 1/град. Учет зависимости предела текучести от температуры при вычислении температурных напряжений производили Б. Я. Любов и Б. Н. Финкельштейн [5].

Окончательно, для пластической деформации, т. е. при $\Gamma > \Gamma_0 = \sigma_s / \sqrt{6}\mu$,

$$F_{пл} = F_0(T) - \frac{\sigma_s^2(\mu-\beta)}{6\mu^2} + \sigma_s \frac{\mu-\beta}{\mu}\Gamma + \frac{3}{2}\beta\Gamma^2 + \frac{K}{2}\varepsilon_{ll}^2 - \alpha K(T-T_0)\varepsilon_{ll},$$

где $F_0(T)$ — свободная энергия недеформированного тела,

$$\sigma_{ik} = \left(2\beta + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{\mu-\beta}{\mu}\frac{1}{\Gamma}\right)\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right) + K\varepsilon_{ll}\delta_{ik} - \alpha K(T-T_0)\delta_{ik}. \qquad (9)$$

Из (9) находим

$$\sigma_{ll} = 3K\varepsilon_{ll} - 3\alpha K(T-T_0),$$

$$\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\sigma_{ll}\delta_{ik} = \left(2\beta + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{\mu-\beta}{\mu}\frac{1}{\Gamma}\right)\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right). \qquad (10)$$

Сравнение (10) с (2) показывает, что

$$\psi = 2\beta + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{\mu-\beta}{\mu}\frac{1}{\Gamma} = 2\beta + \frac{2}{3}\sigma_s^0 \frac{\mu-\beta}{\mu}\frac{1-\lambda(T-T_0)}{\Gamma} \qquad (11)$$

является линейной функцией температуры.

Следовательно, если для пластических деформаций учитывать изменение температуры в (1), то с той же степенью приближения в уравнении (2) необходимо учитывать температурную зависимость ψ.

Для упругих деформаций ($\Gamma < \Gamma_0 = \sigma_s / \sqrt{6}\mu$) с той же степенью приближения свободная энергия, тензор напряжений и интенсивность скалывающих напряжений имеют вид [6]:

$$F_{упр} = F_0(T) + \frac{K}{2}\varepsilon_{ll}^2 + \frac{3}{2}\mu\Gamma^2 - \alpha K(T-T_0)\varepsilon_{ll}, \qquad (12)$$

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F_{упр}}{\partial \varepsilon_{ik}} = K\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right) - \alpha K(T-T_0)\delta_{ik},$$

$$S = 3\mu\Gamma.$$

Из (12) видно, что в области упругих деформаций интенсивность скалывающих напряжений не зависит от температуры.

Графически зависимость S от Γ и от температуры для упругой ($\Gamma < \Gamma_0$) и пластической ($\Gamma > \Gamma_0$) областей изображена на рис. 1. Ломаная OAB соответствует зависимости S от Γ при $T = T_0$, ломаная $OA'B'$ — при $T > T_0$.

Рассмотренное здесь линейное упрочнение не ограничивает общности рассуждений, так как всякую кривую упрочнения $S = {}^3/_2\psi(T, \Gamma)\,\Gamma$ практически можно представить ломаной с различными значениями температурного коэффициента на каждом прямолинейном участке.

Поступило
12 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Качанов, Механика пластических сред, М.— Л., 1948. [2] Н. С. Фастов, ДАН, 78, 251 (1951). [3] А. А. Ильюшин, Пластичность, ч. 1, М.— Л., 1948. [4] Н. С. Фастов, ДАН, 84, № 6 (1952). [5] Б. Я. Любов и Б. Н. Финкельштейн, ЖТФ, 16, 945 (1946). [6] Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, М.— Л., 1944.