Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. С. АРЖАНЫХ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА ПОЛЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 26 IV 1952)

При решении граничных задач играют важную роль формулы Грина, определяющие искомую величину через ее граничные значения и те элементы, которые определяются дифференциальными уравнениями задачи.

Мы здесь построим формулу этого типа для решения тех задач гидродинамики, теории упругости и электродинамики, которые связаны с дифференциальными уравнениями классической теории поля $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=\overrightarrow{\Omega}$, $\mathrm{div}\,\mathbf{v}=\theta$.

Вектор $\mathbf{v}$ в случае внешней задачи будем считать регулярным в смысле Игнатовского — Зоммерфельда. В соответствии с этим представим $\mathbf{v}$ с помощью фундаментального решения $\varphi(p, q\,|\,\lambda)$ уравнения $\nabla^2\varphi-\lambda^2\varphi=0$. Нормаль $\mathbf{n}$ к граничной поверхности S направим вне области $Q+S$.

Лемма. *Вектор поля имеет следующую структуру*:

$$2\pi\mathbf{v}=\lambda^2\int\varphi\mathbf{v}\,dq+\mathrm{grad}\left(\oint\varphi\,(\mathbf{nv})\,ds-\int\varphi\Theta\,dq\right)+$$
$$+\,\mathrm{rot}\left(\int\varphi\overrightarrow{\Omega}\,dq-\oint\varphi\,[\mathbf{nv}]\,ds\right). \tag{1}$$

В самом деле, имеют место формулы:

$$\mathrm{rot}\int\varphi\mathbf{v}\,dq=\int\varphi\overrightarrow{\Omega}\,dq-\oint\varphi\,[\mathbf{nv}]\,ds,$$

$$\mathrm{div}\int\varphi\mathbf{v}\,dq=\int\varphi\Theta\,dq-\oint\varphi\,(\mathbf{nv})\,ds, \tag{2}$$

$$(\mathrm{grad\,div}-\mathrm{rot\,rot}-\lambda^2)\int\varphi\,\mathbf{v}\,dq=-4\pi\mathbf{v}\,(p). \tag{3}$$

Формула (1) синтезирует основные задачи теории поля. В первой задаче известна величина $[\mathbf{nv}]$, а для неизвестной нормальной проекции $(\mathbf{nv})$ из формулы (1) следует интегральное уравнение. Во второй задаче известна величина $(\mathbf{nv})$, а для неизвестных касательных проекций $(\mathbf{e}_1\mathbf{v})$, $(\mathbf{e}_2\mathbf{v})$ из этой формулы следуют интегральные уравнения.

Для приложений, которые будут дальше указаны, важную роль играют интегральные уравнения, непосредственно определяющие вектор $\mathbf{v}$ первой и второй задачи.

Пусть $\Gamma(p, q\,|\,\lambda)=\varphi+G$ — функция Грина уравнения $\nabla^2 G-\lambda^2 G=0$, $G(p, s\,|\,\lambda)=-\varphi(p, s\,|\,\lambda)$.

Теорема 1. *Вектор поля первой задачи удовлетворяет интегральному уравнению*

$$4\pi \mathbf{v}(p) = \mathbf{v}_1 + \int K_1(p, q \,|\, \lambda)\, \mathbf{v}(q)\, dq, \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_1 = -\nabla_p \int \Gamma\Theta\, dq + \mathrm{rot}_p \left(\int \varphi \vec{\Omega}\, dq - \oint \varphi\, [\mathbf{nv}]\, ds \right), \tag{5}$$

$$K_1 = \lambda^2 \varphi I - (\{\nabla_p \cdot \nabla_q\} - \{\nabla_q \times \nabla_q\})\, G. \tag{6}$$

Теорема 2. *Вектор поля второй задачи удовлетворяет интегральному уравнению*

$$4\pi \mathbf{v}(p) = \mathbf{v}_2 + \int K_2(p, q \,|\, \lambda)\, \mathbf{v}(q)\, dq, \tag{7}$$

$$\mathbf{v}_2 = -\nabla_p \left(\int \varphi\Theta\, dq - \oint \varphi\, (\mathbf{nv})\, ds \right) + \mathrm{rot}_p \int \Gamma\, \vec{\Omega}\, dq, \tag{8}$$

$$K_2 = (\lambda^2 \varphi - (\nabla_p \nabla_q)\, G)\, I + \{\nabla_p \cdot \nabla_q\}\, G. \tag{9}$$

Приложение к гидродинамике. Рассмотрим движение твердого тела в жидкости. Представим вектор скорости жидкости в виде $\mathbf{v} - \mathbf{c}$ ($\mathbf{c} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$). Вектор $\mathbf{v}$ должен стремиться к нулю на бесконечности не менее быстро, чем $1/r^3$. Поэтому можно положить $\lambda = 0$. Формула (1) позволяет построить функциональные уравнения для определения вихревого движения жидкости.

1. Жидкость идеальная, несжимаемая. Если вихрь скорости направлен по скорости, то имеет место интеграл Громеко — Прандтля

$$P = C + \rho U - {}^1/_2 \rho v^2 + \rho\, (\mathbf{vc}). \tag{10}$$

В этом случае имеем интегральное уравнение

$$4\pi \mathbf{v}(p) = \mathbf{v}_* + \int (K_2 \mathbf{v} + \omega\, [\nabla_q \Gamma,\, \mathbf{v}])\, dq, \tag{11}$$

вытекающее из уравнения (7). Функция ω удовлетворяет дифференциальному уравнению $(\nabla\omega, \mathbf{v} - \mathbf{c}) = 0$.

2. Жидкость идеальная, баротропная. Если

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{v} = \mu\rho\, (\mathbf{v} - \mathbf{c}), \quad \mu = \mathrm{const}, \tag{12}$$

то имеет место интеграл энергии $H = C$, из которого находим плотность как функцию величины ${}^1/_2 v^2 - (\mathbf{vc})$. Вектор $\mathbf{v}$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$4\pi \mathbf{v}(p) = \mathbf{v}_0 + \int \{K_2 \mathbf{v} + [\mathbf{g}_1,\, \mathbf{v} - \mathbf{c}] + \mathbf{g}_2 (\mathbf{v} - \mathbf{c},\, \vec{\sigma})\}\, dq,$$

$$\vec{\sigma}(p) = \vec{\sigma}_0 - (\mathbf{v} - \mathbf{c},\, \nabla_p)\, \mathbf{v}(p), \tag{13}$$

(где

$$\mathbf{g}_1 = \mu\rho \nabla_p \Gamma, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{d\rho}{dP} \nabla_p \frac{1}{r}, \quad \mathbf{v}_0 = \nabla_p \oint \frac{c_n}{r}\, ds, \quad \vec{\sigma}_0 = \nabla_p U. \tag{14}$$

3. Жидкость вязкая, несжимаемая. Формула (1) в сочетании с формулой Грина теории ньютоновских потенциалов позволяет построить четыре варианта нелинейных интегральных уравнений для определения давления

$$P = \rho\, (\vartheta - {}^1/_2 v^2 + (\mathbf{vc})) \tag{15}$$

и скорости. Наиболее простой вариант определяет скорость в виде

$$\mathbf{V}(p) = -\mathbf{c} + \frac{1}{4\pi\nu}\int \Gamma \mathbf{f}\, dq + \frac{1}{4\pi\nu}\int \mathbf{g}(p, q)\, \vartheta\, dq - \frac{1}{4\pi\nu}\int \Gamma(p, q)\, \vec{\sigma}\, dq, \tag{16}$$

причем ϑ и $\vec{\sigma}$ удовлетворяют уравнениям

$$4\pi\vartheta(p) = \nu\vartheta_* - \int \varepsilon(p, q)\, \vartheta(q)\, dq + \int (\mathbf{g}(q, p)\, \vec{\sigma}(q))\, dq, \tag{17}$$

$$16\pi^2\nu^2\vec{\sigma}(p) = \nu^2\vec{\sigma}_0 + \nu\int \mathbf{l}(p, q)\, \vartheta(q)\, dq + \iint \mathbf{k}(p, q, r)\, \vartheta(q)\, \vartheta(r)\, dq\, dr +$$

$$+ \nu\int ([\vec{\sigma}\,\mathbf{a}] + \{A - I\alpha\}\, \vec{\sigma})\, dq + \iint ([\vec{\sigma}\,\mathbf{b}] + \{B - I\beta\}\, \vec{\sigma}(r)\, \vartheta(q)\, dq\, dr +$$

$$+ \iint \Gamma(p, q)\, (\{\vec{\sigma}(q) \cdot \vec{\sigma}(r)\} - I(\vec{\sigma}(q)\, \vec{\sigma}(r))\, \mathbf{g}(r, p)\, dq\, dr, \tag{18}$$

где

$$\vartheta_* = -\operatorname{div}\mathbf{V}_0, \quad \vec{\sigma}_0 = [\vec{\Omega}_0\mathbf{V}_0], \quad \vec{\Omega}_0 = \operatorname{rot}\mathbf{V}_0, \quad \mathbf{V}_0 = -4\pi\mathbf{c} + \int \Gamma \mathbf{f}\, dq, \tag{19}$$

$$\mathbf{g}(p, q) = \nabla_q\Gamma, \quad \mathbf{e}(p, q) = [\nabla_p\nabla_q]\, G, \quad \varepsilon(p, q) = (\nabla_p\nabla_q)\, G, \tag{20}$$

$$\mathbf{l} = [\vec{\Omega}_0(p)\, \mathbf{g}(p, q)] - [\mathbf{V}_0(p)\, \mathbf{e}(p, q)], \quad \mathbf{k} = [\mathbf{e}(p, r)\, \mathbf{g}(p, q)],$$

$$A = \{\mathbf{g}(q, p) \cdot \mathbf{V}_0(p)\}, \quad \mathbf{a} = \Gamma(p, q)\, \vec{\Omega}_0(p), \quad \alpha = (\mathbf{g}(q, p)\, \mathbf{V}_0(p)),$$

$$B = \{\mathbf{g}(r, p) \cdot \mathbf{g}(q, p)\}, \quad \mathbf{b} = \Gamma(p, r)\, \mathbf{e}(p, q), \quad \beta = (\mathbf{g}(r, p)\, \mathbf{g}(p, q)).$$

П р и л о ж е н и е к т е о р и и у п р у г о с т и. Уравнение Ляме можно представить в виде

$$\operatorname{rot}\vec{\omega} = \frac{1}{\alpha + \beta}(-\mathbf{f} + \eta^2\mathbf{u} - \alpha\nabla^2\mathbf{u}), \quad \operatorname{div}\vec{\omega} = 0, \tag{21}$$

где $\vec{\omega}$ — вихрь изображения по Лапласу вектора смещения, $\sqrt{\alpha}$ и $\sqrt{\beta}$ — скорости волн расширения и искажения. Это представление позволяет использовать формулу (1) при решении граничных задач теории упругости. Так, например, в дополнение к ранее построенным интегральным уравнениям динамики, получено интегральное уравнение первой задачи

$$4\pi\beta\vec{\omega}(p) = \vec{\omega}_0 - (\alpha - \beta)\int D\left(p, q \,\Big|\, \frac{\eta}{\sqrt{\alpha}}\right)\vec{\omega}(q)\, dq, \tag{22}$$

$$\vec{\omega}_0 = \operatorname{rot}_p\left(\int \Gamma\, \mathbf{f}\, dq - \alpha \oint \frac{\partial\Gamma}{\partial n}\, \mathbf{u}(s)\, ds\right), \tag{23}$$

$$D = \left(\frac{\eta^2}{\alpha}\varphi - (\nabla_p\nabla_q)\, G\right)I + \{\nabla_p \times \nabla_q\}\, G. \tag{24}$$

П р и л о ж е н и е к э л е к т р о д и н а м и к е. Рассмотрены также приложения формулы (1) к граничным задачам для уравнений Максвелла. С помощью преобразования Лапласа эти уравнения, как известно, приводятся к виду

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = -\frac{1}{c}\mathbf{E}_0 + \frac{\sigma+\eta}{c}\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \frac{1}{c}\mathbf{H}_0 - \frac{\eta}{c}\mathbf{u}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = P. \tag{25}$$

В зависимости от характера измерений на граничной поверхности S возможны четыре граничных задачи:

1) $(\mathbf{nu}) = f, \quad (\mathbf{nv}) = g;$ 2) $(\mathbf{nu}) = f, \quad (\mathbf{e}_k\mathbf{v}) = g_k;$

3) $(\mathbf{e}_k\mathbf{u}) = f_k, \quad (\mathbf{nv}) = g;$ 4) $(\mathbf{e}_k\mathbf{u}) = f_k, \quad (\mathbf{e}_k\mathbf{v}) = g_k, \quad k=1, 2.$

Для задач первой, второй и третьей построены линейные интегральные уравнения, определяющие изображения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ напряженностей магнитного и электрического поля. Для четвертой задачи получен более эффективный результат: изображения поля определяются в замкнутом виде

$$4\pi\mathbf{u}(p) = \mathbf{u}_* + \nabla_p \oint \varphi u_n\,ds, \quad 4\pi\mathbf{v}(p) = \mathbf{v}_* + \nabla_p \oint \varphi v_n\,ds, \tag{26}$$

$$\mathbf{u}_* = \frac{\sigma+\eta}{c}\mathbf{a} - \operatorname{rot}\mathbf{b}, \quad \mathbf{v}_* = \frac{\eta}{c}\mathbf{b} + \operatorname{rot}\mathbf{a} - \nabla_p \int \varphi P\,dq, \tag{27}$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{c}\int \varphi\mathbf{H}_0\,dq - \oint \varphi(\mathbf{e}_2 g_1 - \mathbf{e}_1 g_2)\,ds, \tag{28}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{c}\int \varphi\mathbf{E}_0\,dq + \oint \varphi(\mathbf{e}_2 f_1 - \mathbf{e}_1 f_2)\,ds. \tag{29}$$

Нормальные проекции изображений определяются из третьего условия разрешимости первой задачи теории поля ([1])

$$u_n = \frac{1}{\eta}(\mathbf{nH}_0) - \frac{c}{\eta}h_1 h_2\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{g_2}{h_2} - \frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{g_1}{h_1}\right), \tag{30}$$

$$v_n = \frac{1}{\sigma+\eta}(\mathbf{nE}_0) + \frac{1}{\sigma+\eta}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{f_2}{h_2} - \frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{f_1}{h_1}\right). \tag{31}$$

Фундаментальное решение φ в формулах (26) соответствует параметру

$$\lambda = \frac{\sqrt{\eta(\sigma+\eta)}}{c}.$$

Институт математики и механики
Академии наук УзбССР

Поступило
17 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Аржаных, ДАН, **82**, № 4 (1952).