Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

ГИДРАВЛИКА

Н. С. ПИСКУНОВ

О ФОРМЕ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ВОДЫ И НЕФТИ ПРИ ОТБОРЕ НЕФТИ ИЗ ПЛАСТА И ПРИ НАГНЕТАНИИ ВОДЫ В ПЛАСТ. ПРОЦЕСС ОБРАЗОВАНИЯ ВОДЯНЫХ КОНУСОВ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 3 V 1952)

Пусть имеем неограниченный горизонтальный * нефтеносный пласт под которым находится водоносный пласт. Обозначим через h_1 и h_2 $(h_1 + h_2 = h)$ мощности нефтяного и водяного пластов. Верхнюю границу нефтяного пласта и нижнюю границу водяного будем считать непроницаемыми.

Будем исходить из уравнений неустановившегося движения жидкости, полученных С. А. Христиановичем и В. В. Девисоном [1].

Рассмотрим сначала плоское движение. Выберем систему координат следующим образом: прямую раздела воды и нефти в начальный момент примем за ось OX, ось OY направим вертикально вверх.

Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p_i}{\partial x} - \frac{g}{k_i}u_i;$$

$$\frac{1}{m}\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p_i}{\partial y} - \frac{g}{k_i}v_i - g; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0;$$

$i = 1$ для нефти, $i = 2$ для воды; u_i и v_i — горизонтальная и вертикальная составляющие скоростей; p_i — давление; k_i — коэффициент фильтрации; m — коэффициент пористости; ρ_i — плотность.

Из результатов П. Я. Полубариновой-Кочиной [2] следует, что если $y = \delta(x, t)$ — уравнение поверхности раздела воды и нефти, то

$$\delta(x, t) = \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda_2 w, \tag{2}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\frac{\rho_1}{h_1} + \frac{\rho_2}{h_2}}{mg(\rho_2 - \rho_1)}, \quad \lambda_2 = \frac{\frac{\rho_1}{h_1 k_1} + \frac{\rho_2}{h_2 k_2}}{\rho_2 - \rho_1}.$$

* Для случаев крупных нефтяных месторождений платформенного типа, где всегда имеются большие водо-нефтяные площади, это предположение является вполне естественным.

Функция $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda_1 m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \lambda_2 m \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{3}$$

Задача 1. Через сечение нефтяной части извлекается нефть с объемным расходом q. Известно положение поверхности раздела воды и нефти в начальный момент; требуется определить положение поверхности раздела воды и нефти в процессе эксплуатации.

Решение этой задачи сводится к исследованию решения дифференциального уравнения (3) при следующих условиях:

$$w(x, 0) = 0; \tag{4,1}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \tag{4,2}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{h_2 \frac{\rho_1}{k_1}}{\frac{\rho_1}{k_1} h_2 + \frac{\rho_2}{k_2} h_1} q. \tag{4,3}$$

Решение уравнения получается в удобной для вычисления форме с помощью операционного метода в виде:

$$w(x, t) = \frac{a_1}{\alpha_0} \int_{\alpha_0 x}^{\beta_0 t} e^{-\tau} I_0\left(\sqrt{\tau^2 - \alpha_0^2 x^2}\right) H(\beta_0 t - \alpha_0 x)\, d\tau, \tag{5}$$

где

$$a_1 = \frac{h_2 \frac{\rho_1}{k_1}}{h_2 \frac{\rho_1}{k_1} + h_1 \frac{\rho_2}{k_2}} q, \tag{6}$$

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_2}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda_1}}, \qquad \beta_0 = \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}; \tag{7}$$

I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента;

$$H(x) = 0 \quad \text{при } x \leqslant 0,$$
$$H(x) = 1 \quad \text{при } x > 0.$$

Это решение получено так: сначала рассмотрено решение уравнения (3) при условиях:

$$v(x, 0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad v(0, t) = 1;$$

затем, путем интегрирования и соответствующих преобразований, получено решение (5).

Подставляя $w(x,t)$ и $\partial w / \partial t$ в равенство (5), получим уравнение поверхности раздела:

$$\delta(x, t) = a_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{m}} \Big[e^{-\beta_0 t} I_0\left(\sqrt{\beta_0^2 t^2 - \alpha_0^2 x^2}\right) +$$
$$+ 2 \int_{\alpha_0 x}^{\beta_0 t} e^{-\tau} I_0\left(\sqrt{\tau^2 - \alpha_0^2 x^2}\right) d\tau \Big] H(\beta_0 t - \alpha_0 x). \tag{8}$$

Из этой формулы следует, что передний край поверхности (фронт волны) движется от забоя по пласту со скоростью $v = \beta_0 / \alpha_0$.

Закон движения поверхности воды по стенке дается формулой:

$$\delta(0, t) = a_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{m}} \left[I_0(\beta_0 t) + 2 \int_0^{\beta_0 t} e^{-\tau} I_0(\tau)\, d\tau \right]. \tag{9}$$

По этой формуле определялось время от начала обводнений при несовершенном вскрытии пласта.

Задача 2. Из нефтяной части пласта извлекается нефть с расходом q_1, из водяной части извлекается вода с расходом q_2. Требуется определить положение поверхности раздела воды и нефти в процессе эксплуатации.

Решение этой задачи сводится к исследованию решения уравнения (3) при следующих условиях:

$$w(x, 0) = 0\,;$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,; \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\frac{\rho_2}{k_2} h_1 q_2 - \frac{\rho_1}{k_1} h_2 q_1}{\frac{\rho_1}{k_1} h_2 + \frac{\rho_2}{k_2} h_1} = \bar{a}.$$

Если дебиты нефти и воды таковы, что

$$\frac{\frac{\rho_2}{k_2} h_1 q_2 - \frac{\rho_2}{k_1} h_2 q_1}{\frac{\rho_1}{k_1} h_2 + \frac{\rho_2}{k_2} h_1} < 0, \tag{11}$$

то поверхность раздела воды и нефти сместится вверх, в противном случае вниз.

Поверхность не будет перемещаться в случае, когда $\bar{a} = 0$, т. е. когда будет

$$\frac{\rho_2}{k_2} h_1 q_2 - \frac{\rho_1}{k_1} h_2 q_1 = 0, \tag{12}$$

или

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{h_1 k_1 \rho_2}{h_2 k_2 \rho_1}.$$

Выражая коэффициент фильтрации через проницаемости $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ получим:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{h_1 \mu_2 \bar{k}_1}{h_2 \mu_1 \bar{k}_2}. \tag{13}$$

Из проведенных исследований следует, что в случае горизонтального пласта при $h_1 \neq 0$ скважина не может полностью обводниться при любом способе вскрытия пласта. Через некоторое время установится отношение дебитов нефти и воды, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{q_1}{q_2} \geqslant \frac{h_1 \mu_2 \bar{k}_1}{h_2 \mu_2 \bar{k}_2}.$$

Эти выводы, а также соотношение (13) остаются справедливыми и для радиального течения, т. е. для скважины месторождения.

Задача 3. В водяную часть пласта нагнетается вода с расходом q. Требуется определить положение поверхности раздела воды и нефти в процессе эксплуатации.

Эта задача сводится к исследованию решения уравнения (3) при условиях (4,1) и (4,2) и условии

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{h_1 \dfrac{\rho_2}{k_2}}{\dfrac{\rho_1}{k_1} h_2 + \dfrac{\rho_2}{k_2} h_1}.$$

Решение получается такое же, как и в случае задачи 1.

Поступило
19 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Христианович, С. Г. Михелин и В. В. Девисон, Некоторые новые вопросы механики сплошной среды, изд. АН СССР, 1938. [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод, изд. АН СССР, 1940.