Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

МЕХАНИКА

М. Д. ДОЛЬБЕРГ

К ВОПРОСУ О КРИТИЧЕСКИХ УГЛОВЫХ СКОРОСТЯХ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВАЛА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 3 V 1952)

Проблема разыскания критических угловых скоростей вала в тех случаях, когда моменты инерции его поперечных сечений настолько малы, что ими можно пренебречь, легко приводится к задаче об определении частот поперечных колебаний этого вала. Столь простая связь между указанными задачами отсутствует, однако, в тех случаях, когда приходится учитывать момент инерции поперечного сечения, так как при этом следует вводить в рассмотрение изгибающие моменты, возникающие за счет момента сил инерций поперечных сечений и гироскопического эффекта.

Этой последней задачей занимались многие авторы, и вопрос о численном определении критических угловых скоростей в случае, когда можно считать, что невесомый вал несет лишь конечное число дисков, был исчерпывающе решен А. Н. Крыловым [1]. Качественными исследованиями этой задачи занимались К. Бицено и Р. Граммель [2], а также Ф. М. Диментберг [3,4]. Однако исследования К. Бицено и Р. Граммеля неполны, а в той части, где рассматривается непрерывное распределение масс, они содержат существенные ошибки*. Ф. М. Диментберг ограничил свои исследования задачи при непрерывно распределенных массах лишь наиболее простым случаем, когда решение вопроса сводится к интегрированию дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

В настоящей заметке мы дадим качественную картину распределения угловых скоростей вала, несущего как сосредоточенные, так и распределенные массы и лежащего на произвольном числе упругих опор**.

Если ω — критическая угловая скорость, $K(x, s)$ — функция влияния изгиба вала, $u(x)$ — амплитуда смещения точек его оси, $d\sigma(x)$ — масса, а $d\tau(x)$ — диаметральный момент инерции элемента длины вала***, то $u(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$u(x) = \omega^2 \int K(x, s)\, u(s)\, d\sigma(s) - \omega^2 \int \frac{\partial}{\partial s} K(x, s)\, u'(s)\, d\tau(s) \qquad (1)$$

---

* Мы не имеем здесь возможности подробно остановиться на ошибке этих авторов, укажем только, что их результат покоится на незаконном предельном переходе.

** Как известно, следует различать два вида критических угловых скоростей — критические скорости одноименных вращений и критические скорости противовращений. Нас будут интересовать лишь первые, так как исследование распределения критических угловых скоростей противовращений не составляет труда и почти лишено практического значения.

*** Для общности мы будем полагать функции $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ независимыми, считая допустимыми также и предельные случаи, отвечающие наличию масс, имеющих равные нулю моменты инерции, и наличию моментов инерции в тех точках, где масса равна нулю.

(здесь и впредь интегралы понимаются в смысле Стильтьеса и распространены на всю длину вала). Уравнение (1), являющееся обобщением на случай произвольного распределения масс уравнения, полученного К. Бицено и Р. Граммелем, может быть легко выведено.

Для того чтобы выяснить влияние моментов инерции поперечных сечений вала на его критические угловые скорости, заменим функцию $\tau(x)$ на $c\tau(x)$, где c — безразмерный множитель. Обозначим через $\omega_i(c)$ i-ю критическую угловую скорость вала. В дальнейшем мы будем в этой заметке изучать свойства функций $\omega_i^2(c)$.

Введем несколько понятий. Связь, устраняющую поперечное смещение точки оси вала, назовем жесткой опорой; связь, устраняющую поворот сечения вала, назовем жестким защемлением. Множество точек роста функций $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ будем, соответственно, обозначать E_σ и E_τ. Интервал, обладающий тем свойством, что на любом его подинтервале производная от $\tau(x)$ не равна тождественно нулю, назовем интервалом роста функции $\tau(x)$. Множество точек из E_σ, не попадающих на E_τ, назовем E. Вал, образованный из данного путем жесткого защемления всех сечений, отвечающих точкам из E_τ, назовем системой S, которая будет играть в дальнейшем существенную роль.

Нами доказана следующая теорема:

Теорема. *Критические угловые скорости являются монотонно возрастающими функциями параметра c, причем:*

1) *Если E содержит бесконечное число точек, то при всех значениях c будет существовать бесконечное число критических угловых скоростей, которые все с ростом c будут стремиться к соответствующим частотам поперечных колебаний системы S.*

2) *Если E содержит конечное число точек, то следует различать два случая:* а) *если при этом E_τ содержит конечное число точек, то число критических угловых скоростей равно числу точек в E_σ и каждая критическая угловая скорость с ростом c стремится к одной из частот поперечных колебаний системы S*; б) *при наличии интервалов роста у $\tau(x)$ ограниченных (при изменении c) критических угловых скоростей будет конечное число, и они стремятся к частотам поперечных колебаний системы S.*

Кроме того, существуют неограниченно возрастающие критические угловые скорости $\omega_i = \omega_i(c)$, графики которых имеют асимптоты, параллельные оси $O\omega$. Все эти асимптоты расположены левее некоторой прямой.

Из п. 2 этой теоремы непосредственно вытекает важное следствие: если E имеет лишь конечное число точек, то число критических угловых скоростей вала также конечно.

Так как реальный вал в каждой точке несет массу, обладающую моментом инерции, то для него E будет пустым множеством, а следовательно, мы вправе заключить, что реальный вал будет иметь конечное число критических угловых скоростей.

Отметив, что система S, образованная из реального вала, имеет либо лишь одну частоту поперечных колебаний (при отсутствии жестких опор) либо ни одной частоты поперечных колебаний (при наличии по крайней мере одной жесткой опоры), мы получаем, как следствие высказанной теоремы, следующий результат:

*При достаточно большом c реальный вал, не опертый ни на одну жесткую опору, имеет лишь одну критическую угловую скорость, а при наличии по крайней мере одной жесткой опоры вовсе не имеет критических угловых скоростей**. Картина распределения

* Как видно из сказанного, применение к рассматриваемой задаче часто употребляемого приема замены распределенных масс сосредоточенными приводит к принципиальному искажению картины распределения критических угловых скоростей. В самом

критических угловых скоростей реального вала дана на рис. 1.

Наметим путь доказательства теоремы. Пусть $\Delta(x, s; \lambda)$ — функция, вторая смешанная производная которой равна резольвенте ядра $\partial^2 K(x, s)/\partial x \partial s$ при весе $d\tau(x)$. Тогда уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$u(x) = \omega^2 \int \Delta(x, s; -c\omega^2)\, u(s)\, d\sigma(s). \qquad (2)$$

Для разыскания критических угловых скоростей, т. е. тех значений ω^2, при которых уравнение (2) имеет нетривиальные решения, рассмотрим вспомогательное уравнение

$$v(x) = \nu \int \Delta(x, s; -\lambda)\, v(s)\, d\sigma(s). \qquad (3)$$

Собственные значения уравнения (3) $\nu_i(\lambda)$ будут при $\lambda \geqslant 0$ непрерывными, положительными, монотонно возрастающими функциями. Мы будем их изучать в связи с тем, что квадраты критических угловых скоростей удовлетворяют уравнениям

$$r = \nu_i(cr), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

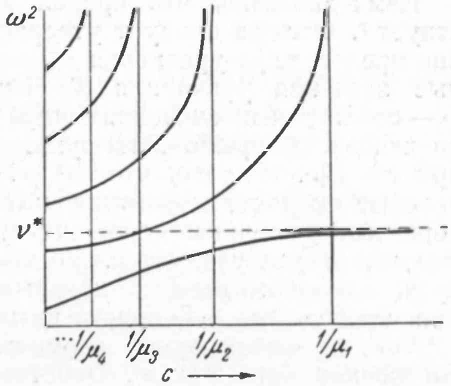

Рис 1

Как было показано Я. Л. Нудельманом [5], функция $\Delta(x, s; -\lambda)$ представима рядом

$$\Delta(x, s; -\lambda) = R(x, s) + \sum_{i=1}^{p} \frac{y_i(x)\, y_i(s)}{\lambda_i + \lambda}, \quad p \leqslant \infty, \qquad (4)$$

где $R(x, s)$ — симметрическое положительное по Мерсеру ядро, тождественно равное постоянной, когда одна из переменных принадлежит к E_τ; $y_i'(x)$ — нормированные собственные функции, а λ_i — собственные значения ядра $\partial^2 K(x, s)/\partial x \partial s$ при весе $d\tau(x)$; p — число точек в E_τ.

Из свойств ядра $\Delta(x, s; -\lambda)$ заключаем, что число собственных значений уравнения (3) равно числу точек в E_σ. Кроме того из (4) и непрерывности функций $\nu_i(\lambda)$ следует, что к каждому из собственных значений уравнения

$$\overline{v}(x) - \overline{\nu} \int R(x, s)\, \overline{v}(s)\, d\sigma(s) \qquad (5)$$

стремится при $\lambda \to \infty$ одна из функций $\nu_i(\lambda)$.

Мы показываем, что $R(x, s)$ является функцией влияния системы S, поэтому, если E содержит бесконечное число точек, то уравнение (5) имеет бесконечное число собственных значений. Из последнего легко следует утверждение п. 1 теоремы.

Точно так же легко доказывается утверждение п. 2а) теоремы, так как если E и E_τ содержат конечное число точек, то числа собственных значений уравнений (3) и (5) совпадают. В случае п. 2б) существуют функции $\nu_i(\lambda)$, стремящиеся к собственным значениям уравнения (5); кроме них, существуют еще собственные значения уравнения (3), стремящиеся к бесконечности вместе с λ. Исследование характера этих последних функций при больших λ представляет основную трудность.

деле, при наличии конечного числа сосредоточенных масс число критических угловых скоростей всегда равно числу масс, а при распределенных массах, как нами показано, критические угловые скорости могут вовсе отсутствовать.

Пусть $\nu_i(\lambda)$ $(i=1, \ldots, n)$ — те собственные значения уравнения (3), которые стремятся к собственным значениям уравнения (5), а $v_i(x, \lambda)$ $(i=1, \ldots, n)$ — отвечающие этим собственным значениям нормированные фундаментальные функции.

Образуем, как это делают обычно, из уравнения (3) следующее уравнение:

$$v(x)=\frac{1}{c}\int\lambda\left[\Delta(x, s; -\lambda)-\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i(x, \lambda)\, v_i(s, \lambda)}{\nu_i(\lambda)}\right]v(s)\, d\sigma(s). \tag{6}$$

Нами доказано, что предел ядра уравнения (6) при $\lambda \to \infty$ существует*. Отсюда следует утверждение п. 2б). Действительно, обозначив предел ядра уравнения (6) через $\Phi(x, s)$, получим, что собственные значения уравнения (6) $1/c_i(\lambda)$ стремятся при $\lambda \to \infty$ к числам μ_i — собственным значениям ядра $\Phi(x, s)$. Поэтому функция $\lambda=\lambda_i(c)$, являющаяся обращением функции $c_i(\lambda)$, стремится к бесконечности при $c=1/\mu_i$. Из того, что $c\omega^2=\lambda_i(c)$, мы заключаем, что критические угловые скорости стремятся к бесконечности при c, стремящемся к обратным величинам соответствующих собственных значений ядра $\Phi(x, s)$, откуда следует п. 2б) теоремы. Из наших рассуждений следует, что асимптоты, о которых идет речь в п. 2б), имеют уравнение $c=1/\mu_i$, где μ_i — собственные числа ядра $\Phi(x, s)$.

Мы не имеем здесь возможности подробно останавливаться на построении ядра $\Phi(x, s)$. Отметим лишь, что если каждая точка вала принадлежит множеству E_τ и вал имеет жесткую опору, то $\Phi(x, s)$ является функцией Грина оператора $L_y=-\left[\frac{d\tau(x)}{dx}\, y'(x)\right]$ при следующих граничных условиях: на жесткой опоре $y(x)=0$, на опорах любого другого вида $y'(x)=0$.

Не лишена интереса, как нам кажется, механическая интерпретация чисел μ_i, которая имеет место при произвольном распределении масс и моментов инерций. Числа μ_i являются отличными от нуля частотами крутильных колебаний валов, каждый из которых расположен в одном из интервалов роста $\tau(x)$ и обладает крутильной жесткостью $d\tau(x)/dx$; валы загружены дисками, у которых полярный момент инерции элемента длины равен $d\sigma(x)$. Условия закрепления этих валов следующие: если на участок, занимаемый моделирующим валом, попадает жесткая опора исходного вала, то это сечение следует считать закрепленным; концы моделирующего вала, на которые не попадает жесткая опора, следует считать свободными.

Поступило
12 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Крылов, Об определении критических угловых скоростей вращающихся валов, 1932. [2] C. Biezeno u. R. Grammel, Technische Dynamik, 1939. [3] Ф. М. Диментберг, Сборн. Поперечные колебания и критические скорости, АН СССР, 1951. [4] Ф. М. Диментберг, Сборн. Поперечные и критические скорости, АН СССР, 1951. [5] Я. Л. Нудельман, Методы определения частот и критических сил для стержневых систем, 1949.

* Доказательство этого факта мы дадим в развернутой работе, которую предполагаем опубликовать в ближайшее время.