

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. С. МЕЛЯХОВЕЦКИЙ

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 V 1952)

Рассмотрим тонкий стержень, ось которого является гладкой плоской кривой неизменяемой длины  $L$ . Стержень имеет на концах упругие опоры, допускающие касательные и нормальные перемещения и поворот концевых сечений; соответственные коэффициенты жесткости мы обозначим  $\tau, \nu, \mu$ .

Введем функцию влияния касательных перемещений  $K(s, \sigma)$  — касательное перемещение в точке  $s$  при действии единичной сосредоточенной касательной силы в точке  $\sigma$ .

Функция  $K(s, \sigma)$  является функцией Грина следующей самосопряженной краевой задачи:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \{l_2 [l_1(w)]\} &= 0, \\ \rho_0 \frac{d}{ds} [l_2 [l_1(w)]] - \tau w &= 0, \\ l_2 [l_1(w)] + \nu \rho_0 \frac{dw}{ds} &= 0, \\ B \frac{d}{ds} [l_1(w)] - \mu l_1(w) &= 0. \end{aligned} \right\} s = 0, L \quad (1)$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2$  — дифференциальные операторы,  $l_1 = \frac{d}{ds} \left( \rho_0 \frac{d}{ds} \right) + \frac{1}{\rho_0}$ ,  $l_2 = \frac{d}{ds} \left( B \frac{d}{ds} \right)$ ,  $w(s)$  — касательное перемещение,  $\rho_0(s)$  — радиус кривизны недеформированной оси стержня,  $B(s)$  — изгибная жесткость стержня.  $B(s)$  и  $\rho_0(s)$  — положительные кусочно-непрерывные функции в  $[0, L]$ .

Следовательно,  $K(s, \sigma)$  — симметрическая функция <sup>(1)</sup>. Пользуясь уравнениями Кирхгоффа — Клебша <sup>(2)</sup>, мы установили следующий механический смысл частных производных функции  $K(s, \sigma)$ . (Через  $K_{pq}(s, \sigma)$  мы в дальнейшем будем обозначать  $\frac{\partial^{p+q} K(s, \sigma)}{\partial s^p \partial \sigma^q}$ .)  $K_{01}(s, \sigma) \rho_0(\sigma)$  — касательное перемещение в точке  $s$  при действии единичной сосредоточенной нормальной силы в точке  $\sigma$ ;  $K_{10}(s, \sigma) \rho_0(s)$  — нормальное перемещение в точке  $s$  при действии единичной сосредоточенной касательной силы в точке  $\sigma$ ;  $K_{11}(s, \sigma) \rho_0(s) \rho_0(\sigma)$  — нормальное перемещение в точке  $s$  при действии единичной сосредоточенной нормальной силы в точке  $\sigma$ .

Запишем интегро-дифференциальные уравнения свободных колебаний стержня в его плоскости:

$$\begin{aligned} w(s, t) &= - \int_0^L K(s, \sigma) \frac{\partial^2 w(\sigma, t)}{\partial t^2} d\xi(\sigma) - \int_0^L K_{01}(s, \sigma) \frac{\partial^3 w(\sigma, t)}{\partial \sigma \partial t^2} d\xi(\sigma), \\ \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} &= - \int_0^L K_{10}(s, \sigma) \frac{\partial^2 w(\sigma, t)}{\partial t^2} d\xi(\sigma) - \int_0^L K_{11}(s, \sigma) \frac{\partial^3 w(\sigma, t)}{\partial \sigma \partial t^2} d\xi(\sigma), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $d\xi(s)$  — масса, приходящаяся на элемент  $ds$  стержня; кроме того, нормальное перемещение  $u(s, t) = \rho_0(s) \frac{\partial w(s, t)}{\partial s}$  (условие нерастяжимости упругой линии).

Полагая  $w(s, t) = w(s) \sin(pt + \varepsilon)$ , получим;

$$\begin{aligned} w(s) &= \lambda \int_0^L K(s, \sigma) w(\sigma) d\xi(\sigma) + \lambda \int_0^L K_{01}(s, \sigma) w'(\sigma) d\xi(\sigma), \\ w'(s) &= \lambda \int_0^L K_{10}(s, \sigma) w(\sigma) d\xi(\sigma) + \lambda \int_0^L K_{11}(s, \sigma) w'(\sigma) d\xi(\sigma) \end{aligned} \quad (3)$$

$$(\lambda = p^2).$$

Систему (3) можно привести к одному нагруженному интегральному уравнению:

$$y(s) = \lambda \int_{L^*} H(s, \sigma) y(\sigma) d\xi(\sigma), \quad (4)$$

где  $L^*$  — совокупность двух интервалов  $[0, L]$ , наложенных друг на друга и обозначаемых  $L_1$  и  $L_2$ , а

$$H(s, \sigma) = \begin{cases} K(s, \sigma), & s, \sigma \in L_1; \\ K_{01}(s, \sigma), & s \in L_1, \sigma \in L_2; \\ K_{10}(s, \sigma), & s \in L_2, \sigma \in L_1; \\ K_{11}(s, \sigma), & s, \sigma \in L_2; \end{cases}$$

$$y(s) = w(s), \quad s \in L_1;$$

$$y(s) = w'(s), \quad s \in L_2.$$

Симметричность ядра  $H(s, \sigma)$  следует из симметричности  $K(s, \sigma)$ . Положительная определенность  $H(s, \sigma)$  в усиленном смысле <sup>(3)</sup> следует из положительности потенциальной энергии деформации устойчивого стержня.

$$\begin{aligned} V(X, Z) &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^L \int_0^L K(s, \sigma) dZ(s) dZ(\sigma) + \int_0^L \int_0^L K_{01}(s, \sigma) \rho_0(\sigma) dZ(s) dX(\sigma) + \right. \\ &+ \left. \int_0^L \int_0^L K_{10}(s, \sigma) \rho_0(s) dX(s) dZ(\sigma) + \int_0^L \int_0^L K_{11}(s, \sigma) \rho_0(s) \rho_0(\sigma) dX(s) dX(\sigma) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{L^*} \int_{L^*} H(s, \sigma) dQ(s) dQ(\sigma); \end{aligned}$$

$$dQ(s) = dZ(s), \quad s \in L_1;$$

$$dQ(s) = \rho_0(s) dX(s), \quad s \in L_2$$

( $X(s)$  и  $Z(s)$  — проекции на нормаль и касательную к упругой линии главного вектора внешних сил, отнесенного к единице длины упругой линии).

Итак, задача определения частот и амплитудных функций колеблющегося криволинейного стержня свелась к определению собственных чисел и фундаментальных функций однородного нагруженного интегрального уравнения Фредгольма (4) с симметрическим и положительным ядром и монотонной функцией распределения.

Отметим, что такие важные положения, как ортогональность амплитудных функций и вещественность частот, непосредственно следующие из (4), для криволинейного стержня устанавливаются здесь впервые.

Для интегрального уравнения (4) справедлива теорема Мерсера

$$H(s, \sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(s)y_i(\sigma)}{\lambda_i}. \quad (5)$$

Ряд (5) сходится абсолютно и равномерно в области определения ядра  $H(s, \sigma)$ , а функции  $y_i(s)$  образуют полную ортонормированную систему.

Определим функцию  $y(s, t)$  так, чтобы

$$\begin{aligned} y(s, t) &= w(s, t), & s \in L_1; \\ y(s, t) &= \frac{\partial w(s, t)}{\partial s}, & s \in L_2. \end{aligned}$$

Систему (2) можно теперь записать в виде

$$y(s, t) = - \int_{L^*} H(s, \sigma) \frac{\partial^2 y(\sigma, t)}{\partial t^2} d\xi(\sigma). \quad (6)$$

Заменив  $H(s, \sigma)$  в (6) разложением (5), получим

$$y(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i(t) y_i(s), \quad (7)$$

где  $\Theta_i(t) = - \frac{1}{\lambda_i} \int_{L^*} y_i(\sigma) \frac{\partial^2 y(\sigma, t)}{\partial t^2} d\xi(\sigma)$ .

Тем же путем, что и в (3), можно получить

$$\Theta_i(t) = A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$w(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) w_i(s); \quad (8)$$

$$u(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) u_i(s); \quad (9)$$

$$u_i(s) = w'(s) \rho_0(s).$$

Таким образом, перемещения при колебании стержня разлагаются в равномерно сходящиеся ряды Фурье по фундаментальным функциям  $w_i(s)$ ,  $u_i(s)$ .

Вывод формул (8) и (9) является обоснованием метода Фурье в рассматриваемой задаче.

Поступило  
27 II 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> М. Г. Крейн, Матем. сборн., 2, в. 44, 1023 (1937). <sup>2</sup> А. Ляв, Математическая теория упругости, 1935. <sup>3</sup> Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 1950.