Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Т. А. ШУЛЬМАН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИЖДЫ СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 V 1952)

1. Бианки построил триортогональные системы поверхностей с одним семейством псевдосферических поверхностей таких, что, применяя преобразование Бэклюнда к каждой псевдосферической поверхности семейства, можно получить новую триортогональную систему того же типа ([1]).

Аналогичную задачу можно поставить в проективном пространстве. Будем называть трижды сопряженной системой R три семейства поверхностей, пересекающиеся по сопряженной системе линий, если одно из этих семейств состоит из поверхностей R и две линии, высекаемые на них, есть сети R. Как известно, одна поверхность является асимптотическим преобразованием другой, если они являются фокальными поверхностями одной конгруенции W.

Назовем асимптотическим преобразованием нашей системы такую трижды сопряженную систему, которая удовлетворяет следующим требованиям:

а) сопряженные сети, высекаемые ее поверхностями, соответствуют сопряженным сетям первой системы;

б) поверхности R данной системы преобразуются асимптотически в поверхности R второй системы.

Будем искать трижды сопряженные системы R, допускающие асимптотические преобразования. Для решения поставленной задачи свяжем с каждой точкой трижды сопряженной системы тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$. Вершина A_0 описывает трижды сопряженную систему. Ребра A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 направлены по касательным к линиям пересечения поверхностей системы. Плоскость $A_0A_1A_2$ является касательной к поверхности R. Аналогичный тетраэдр $B_0B_1B_2B_3$ свяжем с каждой точкой преобразованной системы. Дифференциальные проективные перемещения тетраэдров $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ определяются уравнениями:

$$dA_i = \omega_i^\alpha A_\alpha, \quad dB_i = \Omega_i^\alpha B_\alpha, \quad i, j, \ldots, \alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3,$$

где ω_i^j и Ω_i^j— линейные однородные формы относительно дифференциалов параметров движения тетраэдров; они подчиняются уравнениям структуры:

$$D\omega_i^j = [\omega_i^\alpha \omega_\alpha^j], \quad D\Omega_i^j = [\Omega_i^\alpha \Omega_\alpha^j].$$

(Суммирование все время идет только по греческим индексам.)

Реперы $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ связаны соотношениями:

$$A_i = a_i^\alpha B_\alpha, \quad B_i = b_i^\alpha A_\alpha.$$

В этих обозначениях условия того, что A_0 и B_0 описывают трижды сопряженные системы, записываются в виде:

$$[\omega_i^j \omega^i \omega^j] = 0, \quad [\Omega_i^j \Omega^i \Omega^j] = 0, \quad i \neq j \neq 0. \tag{1}$$

Условия соответствия линий пересечения поверхностей трижды сопряженных систем имеют следующий вид:

$$[\Omega^i \omega^i] = 0. \tag{2}$$

Мы будем называть поверхность, описываемую точкой A_0 при $\omega^3 = 0$, поверхностью (A_0) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$; конгруенцию (A_0B_0), получающуюся при этом, будем называть конгруенцией (A_0B_0) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$; конгруенцию (A_0A_3) будем называть нормальной конгруенцией поверхности (A_0) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$.

Необходимым и достаточным условием соответствия асимптотических линий на поверхностях (A_0) и (B_0) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ является требование, чтобы луч преобразования A_0B_0 лежал в касательных плоскостях $A_0A_1A_2$ и $B_0B_1B_2$.

В самом деле, при этом на фокальных поверхностях (A_0) и (B_0) конгруенции (A_0B_0) соответствуют две пары сопряженных сетей: фокальная сеть конгруенции и сеть линий $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$; отсюда следует соответствие асимптотических линий. Аналитически это условие записывается уравнениями:

$$a_0^3 = 0, \quad b_0^3 = 0. \tag{3}$$

Напишем, наконец, условия того, что поверхности (A_0) и (B_0) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ являются поверхностями R. Если поверхность R преобразуется асимптотически в поверхностях R и луч преобразования не совпадает с касательными к сети R, то все поверхности R последовательности Лапласа, порождаемой сетью R исходной поверхности, преобразуются асимптотически в поверхности R последовательности Лапласа, построенной на сети R преобразованной поверхности [2]. Это условие является также и достаточным для того, чтобы преобразуемые поверхности были поверхностями R.

В самом деле, две пары конгруенций (A_0A_1) и (B_0B_1) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ образуют сопряженную пару и являются конгруенциями R. Итак, поместим точки A_1, A_2, B_1 и B_2, соответственно, в фокусах лучей A_0A_1, A_0A_2, B_0B_1 и B_0B_2 конгруенций, описываемых ими по модулю ω^3. Потребуем, чтобы луч A_1A_2 лежал в касательных плоскостях к поверхностям (A_1) и (B_1) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$.

Получим:

$$\begin{gathered}[\Omega_1^2 \Omega^1 \Omega^3] = 0, \quad [\omega_1^2 \omega^1 \omega^3] = 0, \quad [\Omega_2^1 \Omega^2 \Omega^3] = 0, \quad [\omega_2^1 \omega^2 \omega^3] = 0, \\ [b_1^3 \omega_1^2 - b_1^2 \omega_1^3;\ \omega^3] = 0, \quad [a_1^3 \Omega_1^2 - a_1^2 \Omega_1^3;\ \Omega^3] = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Присоединяя к системе уравнений (1) — (4) их дифференциальные следствия, придем к замкнутой системе уравнений, дающей решение задачи о существовании трижды сопряженных систем поверхностей R, допускающих асимптотические преобразования. После одного продолжения система уравнений будет в инволюции и определяет пару трижды сопряженных систем R, связанных асимптотическим преобразованием, с произволом 13 функций одного аргумента [3].

При этом справедлива следующая теорема: если трижды сопряженная система поверхностей R преобразуется асимптотически, то и нормальная конгруенция (A_0A_3) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ будет конгруенцией R, и конгруенции (A_0A_3) и (B_0B_3) образуют сопряженную пару.

Т. Л. Козьмина [4] доказала, что все преобразования Лапласа трижды сопряженных систем поверхностей являются снова трижды сопряженными системами. Таким образом, в нашем случае получается следующая картина: трижды сопряженные системы R последовательности Лапласа, порожденной сетью R поверхности (A_0) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$, преобразуются в трижды сопряженные системы R последовательности Лапласа, построенной на сети R поверхности (B_0) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$. Нормальными конгруенциями этих трижды сопряженных систем по модулю ω^3 будут конгруенции двух последовательностей Лапласа, порожденных конгруенциями (A_0A_3) и (B_0B_3) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$. При этом трижды сопряженные системы последовательности, порожденной конгруенцией (A_0A_3), тоже преобразуются асимптотически в трижды сопряженные системы последовательности, построенной на B_0B_3.

Этот результат можно объяснить иначе. Нормальная конгруенция (A_0A_3) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ сопряжена поверхности (A_0), т. е. ее развертывающиеся поверхности высекают на этой поверхности сопряженную сеть. В нашем случае асимптотические линии на фокальных поверхностях конгруенции (A_0A_3) соответствуют асимптотическим линиям на поверхности (A_0) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$, т. е. конгруенция (A_0A_3) вполне сопряжена поверхности (A_0). Между тем, как известно, конгруенция, вполне сопряженная поверхности, есть конгруенция R, и поверхность есть поверхность R.

2. Бианки рассматривал специальный случай преобразования псевдосферических поверхностей и триортогональных систем посредством нормальной псевдосферической конгруенции. Он назвал такое преобразование дополнительным. Оно обладает тем свойством, что нормаль к преобразуемой поверхности лежит в касательной плоскости преобразованной поверхности, и наоборот.

Аналогичным образом в проективном пространстве будем считать две трижды сопряженные системы связанными дополнительным преобразованием, если это будет асимптотическое преобразование и нормаль A_0A_3 лежит в касательной плоскости $B_0B_1B_2$, а нормаль B_0B_3 лежит в плоскости $A_0A_1A_2$.

Трижды сопряженные системы поверхностей, допускающие дополнительные преобразования, существуют и определяются с произволом 11 функций одного аргумента; они оказываются при этом трижды сопряженными системами R.

Говорят, что одна последовательность Лапласа конгруенций описана около другой, если фокусы второй последовательности лежат на лучах первой и развертывающиеся поверхности конгруенций обеих последовательностей соответствуют. Вторая последовательность называется вписанной в первую. В случае дополнительного преобразования трижды сопряженной системы поверхностей получаем следующую картину: последовательность Лапласа, порожденная нормальной конгруенцией (A_0A_3) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$, описана около последовательности Лапласа, построенной на сети R поверхности (A_0), в эту последнюю вписана последовательность, порожденная конгруенцией (B_0B_3), в которую вписана последовательность, построенная на сети R поверхности (B_0), и эта последняя в свою очередь описана около исходной последовательности.

3. Полученный результат позволяет ввести определение расслояемой пары комплексов. Рассмотрим две трижды сопряженные системы поверхностей R, связанные общим асимптотическим преобразованием. Конгруенции (A_0A_1) и (B_0B_1) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ образуют расслояемую пару

конгруенций R. Расслоющие поверхности являются поверхностями R. Оказывается, что, когда точки A_0 и B_0 описывают трижды сопряженные системы R, расслоющие поверхности R описывают семейство поверхностей, являющееся одним из семейств трижды сопряженной системы, линии пересечения которой соответствуют линиям пересечения данных трижды сопряженных систем A_0 и B_0. Таким образом, (A_0A_1) и (B_0B_1) образуют расслояемую пару комплексов в том смысле, что с каждым лучом пары комплексов связаны два однопараметрических семейства трижды сопряженных систем поверхностей R. Касательные плоскости к поверхностям R трижды сопряженных систем, связанных с лучом A_0A_1, проходят через луч B_0B_1, и наоборот. Такую пару комплексов (A_0A_1) и (B_0B_1) мы назовем расслояемой парой комплексов R.

Аналогично, так же как и для расслояемых конгруенций R, получим, что последовательность Лапласа трижды сопряженных систем R, порожденная сетью R любой расслоющей системы луча комплекса (A_0A_1) по модулю ω^3, вписана в последовательность Лапласа трижды сопряженных систем R, порожденную комплексом (A_0A_1), и описана около последовательности, порожденной комплексом (B_0B_1) по тому же модулю. В случае дополнительного преобразования системы (A_0) в систему (B_0) расслоющие системы пары комплексов (A_0A_1) и (B_0B_1) связаны также дополнительным преобразованием.

В заключение выражаю благодарность проф. С. П. Финикову, под руководством которого выполнена эта работа.

Поступило
11 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1910. [2] С. П. Фиников, Теория конгруенций, 1950. [3] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, 1948. [4] Т. Л. Козьмина, ДАН, 55, № 3 (1947).