Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 3

МАТЕМАТИКА

И. И. ШАПИРО-ПЯТЕЦКИЙ

К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 28 V 1952)

Принято называть M-множеством всякое множество E, для которого существует тригонометрический ряд с коэффициентами, отличными от нуля, сходящийся к нулю всюду вне E. Если же сходимость тригонометрического ряда к нулю всюду вне E необходимо влечет за собой равенство нулю всех его коэффициентов, то E называется U-множеством.

В работе Верблюнского ([1]) рассмотрен некоторый класс совершенных множеств и доказано *, что они являются M-множествами.

В настоящей заметке дается построение примера, противоречащего теореме Верблюнского, т. е. примера совершенного множества, которое входит в рассмотренный Верблюнским класс и, однако, является U-множеством.

Пусть P — совершенное множество, лежащее на некотором отрезке ρ, и $d_1, \ldots, d_n, \ldots$ — его смежные интервалы. Верблюнский называет «индексом» интервала d_1 отношение d_1 / ρ. Допустим, что «индексы» интервалов $d_1, \ldots, d_n$ уже определены. После удаления этих интервалов из ρ остается $n+1$ отрезков; пусть δ — тот из них, на котором лежит d_{n+1}; тогда «индексом» интервала d_{n+1} называется отношение d_{n+1} / δ.

На стр. 288 работы ([1]) Верблюнский формулирует теорему: если смежные интервалы совершенного множества P, лежащего на $[0, 2\pi]$, могут быть перенумерованы так, что «индекс» d_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то такое множество P есть M-множество.

Пусть x — точка на $[0, 1]$ и $x = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m \ldots$ — ее разложение в двоичную дробь.

Удалим из $[0, 1]$ все те точки x, для которых хотя бы при одном значении n имеем (при любой записи в двоичное разложение)

$$\varepsilon_{(2n-1)^2} = 0, \qquad \varepsilon_{(2n)^2} = 1. \tag{1}$$

Оставшееся множество P_0 будет совершенным и лежит на $[0, 1]$. Покажем, что его смежные интервалы можно перенумеровать так, чтобы их «индексы» стремились к нулю, когда номер интервала стремится к бесконечности.

---

* Как мне стало известно от проф. Н. К. Бари, ошибка в доказательстве теоремы Верблюнского недавно была обнаружена Крестенсоном; однако оставалось неизвестным, можно ли исправить доказательство или же сама теорема неверна.

Точки x, для которых $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_4 = 1$, образуют 4 интервала длины $1/2^4$; их удаление из $[0, 1]$ назовем первым шагом процесса построения P_0; перенумеруем эти интервалы слева направо. Тогда их «индексы» возрастают с ростом их номера, но «индекс» каждого из них заведомо меньше, чем отношение его длины к длине интервала, где $\varepsilon_1 = 1$, который не был удален, т. е. меньше, чем $\frac{1}{2^4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$.

Если $n-1$ первых шагов процесса были уже сделаны, то n-м шагом его мы называем удаление из каждого из оставшихся сегментов таких интервалов, где $\varepsilon_{(2n-2)^2} = 0$, а $\varepsilon_{(2n)^2} = 1$. Их конечное число, и мы их нумеруем слева направо. Ясно, что длина каждого такого интервала равна $1/2^{(2n)^2}$, но так как при его удалении в сегменте, из которого он удалялся, заведомо были сохранены точки, где $\varepsilon_{(2n-1)^2} = 1$, т. е. сохранялся сегмент длины $1/2^{(2n-1)^2}$, то «индексы» всех интервалов, удаленных при n-м шаге процесса, меньше, чем $\frac{1}{2^{(2n)^2}} : \frac{1}{2^{(2n-1)^2}} = \frac{1}{2^{4n-1}}$, а это показывает, что «индекс» стремится к нулю, когда номер интервала стремится к бесконечности.

Пусть P есть множество тех t, для которых $t = 2\pi x$, $x \in P_0$. Тогда P есть совершенное множество на $[0, 2\pi]$, входящее в класс, рассмотренный Верблюнским. Мы докажем, однако, что P есть U-множество.

Будем обозначать через $\{y\}$ дробную часть числа y. Ясно, что если $x = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m\ldots$, то $\{2^m x\} = 0,\varepsilon_{m+1}\ldots$

Поэтому, полагая

$$p_k = 2^{(2k-1)^2-1}, \quad q_k = 2^{(2k)^2-1}, \tag{2}$$

видим, что для любого k, если $\Delta_1 = (0, {}^1/_2)$, а $\Delta_2 = ({}^1/_2, 1)$, то:

$$\text{либо } \{p_k x\} \overline{\in} \Delta_1, \quad \text{либо } \{q_k x\} \overline{\in} \Delta_2 \quad \text{для } x \in P_0. \tag{3}$$

Действительно, если бы для некоторой точки $x \in P_0$ при некотором k мы имели бы одновременно $\{p_k x\} \in \Delta_1$, $\{q_k x\} \in \Delta_2$, это означало бы, что $\varepsilon_{(2k-1)^2} = 0$, а $\varepsilon_{(2k)^2} = 1$, что, в силу формулы (1), противоречит определению P_0.

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две функции с периодом, равным 1, и непрерывные вместе со своими производными до третьего порядка включительно.

Кроме того, мы потребуем, чтобы:

а) $\varphi_i(x) > 0$ на Δ_i; $\varphi_i(x) = 0$ вне Δ_i $(i = 1, 2)$;

б) $\int_0^1 \varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 \varphi_2(x)\,dx = 1$.

Наконец, положим

$$f_k(x) = \varphi_1(p_k x)\,\varphi_2(q_k x). \tag{4}$$

Рассмотрим разложение $f_k(x)$ в ряд Фурье

$$f_k(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m^{(k)} e^{2\pi m i x} \tag{5}$$

и докажем, что выполнены условия:

А. $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_m^{(k)} = 0$ для $m \neq 0$.

Б. $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_0^{(k)} = 1$.

В. $\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} |\gamma_m^{(k)}| \leqslant C, \quad k = 1, 2, \ldots,$

где C — постоянная величина.

В самом деле, $f_k(x)$ — функция с периодом $2^{1-(2k-1)^2}$, и следовательно,

$$\gamma_m^{(k)} = \int\limits_0^1 e^{2\pi m i x} f_k(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad 0 < |m| < 2^{(2k-1)^2-1},$$

что и доказывает справедливость А.

Далее, имеем

$$\gamma_0^{(k)} = \int\limits_0^1 f_k(x)\, dx = \int\limits_0^1 \varphi_1(2^{(2k-1)^2-1}x)\, \varphi_2(2^{(2k)^2-1}x)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \varphi_1(x)\, \varphi_2(2^{4k-1}x)\, dx = 1 + \sum{}' \alpha_{-m2^{4k-1}} \beta_m, \tag{6}$$

где положено

$$\varphi_1(x) = \sum \alpha_m e^{2\pi m i x}, \quad \varphi_2(x) = \sum \beta_m e^{2\pi m i x},$$

а Σ' означает, что индекс суммирования пробегает все значения, кроме 0.

Легко видеть, что $\lim\limits_{k\to\infty} \Sigma' \alpha_{-m2^{4k-1}} \beta_m = 0$, и, следовательно, Б справедливо.

Наконец, условие В следует из того, что

$$\sum |\gamma_m^{(k)}| \leqslant \sum |\alpha_m| \sum |\beta_m|.$$

Для дальнейшего нам необходимо еще заметить, что

$$f_k(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in P_0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Действительно, это вытекает из (3), из условия а), наложенного на $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, и из их периодичности.

Допустим теперь, что P есть M-множество; тогда существует тригонометрический ряд $\Sigma a_n e^{inx}$ с коэффициентами, отличными от нуля, который сходится к нулю на $[0, 2\pi]$ всюду вне P; иначе говоря, существует ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi n i x}, \tag{8}$$

сходящийся к нулю на $[0, 1]$ всюду вне P_0. Составим «формальное произведение» $\sum c_n^{(k)} e^{2\pi n i x}$ ряда (8) на ряд (5); на основании свойств А, Б и В ряда (5), по теореме Райхмана (см. ([2]), стр. 401), будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} c_n^{(k)} = a_n. \tag{9}$$

Но так как все $f_k(x)$ непрерывны вместе со своими производными до третьего порядка включительно, то к рядам (8) и (5) могут быть также применены теоремы стр. 397 и 398 той же работы Райхмана. Поэтому их формальное произведение сходится к нулю всюду вне P_0, так как ряд (8) там сходится к нулю, и сходится к нулю всюду на P_0, так как там все $f_k(x)$ равны нулю на основании (7). Итак, формальное произведение сходится к нулю всюду, а потому $c_n^{(k)} = 0$ для любых значений n и k. Но тогда, на основании (9), имеем $a_n = 0$ для всех n, и, значит, множество P не есть M-множество.

Выражаю благодарность проф. Н. К. Бари за помощь и руководящие указания при решении задачи.

Поступило
28 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Verblunsky, Acta Math., **65**, 283 (1935). [2] A. Rajchman, Math. Ann., **95**, 389 (1925).