

О. А. ОЛЕЙНИК

**О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ
ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 V 1952)

Мы будем изучать поведение решений краевых задач для уравнений эллиптического и параболического типа при малых значениях параметра ε при старших производных.

Пусть $u_\varepsilon(x, y)$ — решение уравнения

$$L_\varepsilon(u) \equiv \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) u = f(x, y), \quad (1)$$

удовлетворяющее на границе S области D условию:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + au = \varphi. \quad (2)$$

Функции $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $f(x, y)$ заданы в некоторой области, содержащей $D + S$, и имеют непрерывные производные четвертого порядка, $C(x, y) < 0$. Граница S области D состоит из конечного числа замкнутых кривых, координаты x и y каждой из которых являются четыре раза непрерывно дифференцируемыми функциями длины дуги. Функции a и φ , как функции длины дуги, имеют две непрерывные производные, $a \leq 0$; du/dn означает производную по направлению внутренней нормали к границе области D .

Установим на границе S положительное направление так, чтобы при обходе границы в положительном направлении область оставалась слева. Обозначим через s длину дуги кривой из S и пусть s возрастает при обходе кривой в положительном направлении.

Будем считать, что точка границы S принадлежит S_1 , если в этой точке $B(x, y) \frac{dx}{ds} - A(x, y) \frac{dy}{ds} < 0$; принадлежит S_2 , если $B(x, y) \frac{dx}{ds} - A(x, y) \frac{dy}{ds} > 0$, и принадлежит S_0 , если $B(x, y) \frac{dx}{ds} - A(x, y) \frac{dy}{ds} = 0$.

Теорема 1. Пусть в $D + S$ существует дважды непрерывно дифференцируемое решение $U(x, y)$ уравнения

$$A(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} + C(x, y) U = f(x, y), \quad (3)$$

удовлетворяющее в точках S_1 границы S условию $\frac{\partial U}{\partial n} + aU = \varphi$. Тогда $u_\varepsilon(x, y)$ при ε , стремящемся к нулю, равномерно в $D + S$ сходятся к функции $U(x, y)$.

Доказательство. Пусть $S_0^{2\alpha}$ означает множество точек границы S , для которых расстояние до S_0 не больше 2α , и пусть $\Psi = \varphi - \left(\frac{\partial U}{\partial n} + aU\right)$. Построим функцию $z_1(x, y, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} h_1 e^{-g_1/\sqrt{\varepsilon}}$, где g_1 и h_1 — дважды дифференцируемые функции в $D + S$ и такие, что $g_1 = 0$ на S , $\partial g_1/\partial n > 0$ на S и $g_1 > 0$ в D ; $h_1 = -\Psi / \frac{\partial g_1}{\partial n}$ на $S_0^{2\alpha}$. h_1 не превосходит в D $\max \left| \Psi / \frac{\partial g_1}{\partial n} \right|$ и равна нулю в тех точках $D + S$, расстояние которых до S_0 больше 3α . Легко проверить, что для любого $\delta > 0$ $|L_\varepsilon(z_1)| < \delta$, если α и ε достаточно малы.

Обозначим через S_2^α множество точек S_2 , для которых расстояние до S_0 больше α . Построим в $D + S$ функцию $z_2(x, y, \varepsilon) = \varepsilon h_2 e^{-g_2/\varepsilon}$, где $g_2(x, y)$ определена в некоторой окрестности Ω точек S_2^α как решение уравнения $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 - A(x, y) \frac{\partial g}{\partial x} - B(x, y) \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, обращаясь в нуль на S_2^α и положительное в точках D . Функция h_2 — любая дважды дифференцируемая функция, равная $-\frac{(\Psi + h_1 \partial g_1/\partial n)}{\partial g_2/\partial n}$ на границе S_2^α , и равная нулю в тех точках $D + S$, расстояние которых до $S_2^{2\alpha}$ больше α . Легко проверить, что $|L_\varepsilon(z_2)| \leq k_2 \varepsilon$, где k_2 — некоторая постоянная, не зависящая от ε . Можно показать, пользуясь леммой 2(1), что $u_\varepsilon(x, y) = U(x, y) + z_1(x, y, \varepsilon) + z_2(x, y, \varepsilon) + \omega(x, y, \varepsilon)$, где $|\omega(x, y, \varepsilon)| < \delta$, если ε достаточно мало. Из этого равенства следует утверждение теоремы.

Следствие. Пусть граница S такова, что все ее точки принадлежат либо S_0 , либо S_2 . Тогда, если существует в $D + S$ какое-либо дважды дифференцируемое решение уравнения (3), то $u_\varepsilon(x, y)$ сходятся при ε , стремящемся к нулю, согласно теореме 1, к этому решению. Если $f(x, y) \equiv 0$ в D , то таким решением будет $U(x, y) \equiv 0$.

Будем в дальнейшем предполагать, что в $D + S$ $A^2(x, y) + B^2(x, y) \neq 0$ и замыкание множества S_1 состоит из конечного числа связных компонент. Пусть P_1^i и P_2^i — конечные точки i -й компоненты и направление границы совпадает с направлением от P_1^i до P_2^i . Рассмотрим на S_1 уравнение

$$\cos(s, t) \frac{du}{ds} = -\frac{C(x, y)u}{\sqrt{A^2 + B^2}} + a \cos(n, t)u - \cos(n, t)\varphi + \frac{f}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (4)$$

где $\cos(s, t)$ означает косинус угла между касательной и вектором с компонентами $(A(x, y), B(x, y))$ в точке границы S_1 , а $\cos(n, t)$ — косинус угла между направлением внутренней нормали и тем же вектором.

Пусть E — множество точек S_1 , для которых $\cos(s, t) = 0$. Будем называть решением уравнения (4) всякую функцию $u(s)$, которая удовлетворяет уравнению (4) во всех точках дополнения к E на S_1 и в точках E определяется равенством

$$-Cu + a \cos(n, t) \sqrt{A^2 + B^2} u - \sqrt{A^2 + B^2} \cos(n, t) \varphi + f = 0.$$

Можно показать, что существует единственное ограниченное и непрерывное на S_1 решение уравнения (4), которое в граничных точках P_k^i , где $(-1)^k \cos(s, t) > 0$, принимает заданные значения.

Лемма 1. Предположим, что в $D + S$ каждая интегральная кривая уравнения

$$\frac{dx}{A(x, y)} = \frac{dy}{B(x, y)}, \quad (5)$$

на которой мы установим положительное направление, определяемое вектором $(A(x, y), B(x, y))$, является либо замкнутой линией, либо имеет начало и конец в некоторых точках границы S . В этом случае существует единственная непрерывная в $D + S$ функция $U(x, y)$ такая, что на \bar{S}_1 она является решением уравнения (4), а вдоль кривых (5) она удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU}{dt} = \frac{-CU + f}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (6)$$

где через t обозначена длина дуги интегральной кривой уравнения (5).

Доказательство. На замкнутых интегральных кривых (5) функция $U(x, y)$ определяется как периодическое решение уравнения (6). В точках P_k^i ($k = 1, 2$), где $(-1)^k \cos(s, t) > 0$, функция $U(x, y)$ однозначно определяется из условия непрерывности.

Замечание. Условия леммы 1 относительно области D будут выполняться, если в $D + S$ нет предельных циклов.

Теорема 2. Предположим, что для области D выполнены условия леммы 1. Тогда функции $u_\varepsilon(x, y)$ сходятся равномерно в $D + S$, если ε стремится к нулю, к функции $U(x, y)$, построенной в лемме 1.

Доказательство. Можно показать, что для любого достаточно малого $\delta > 0$ существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $U_\delta(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (3) и такая, что $|U(x, y) - U_\delta(x, y)| < \delta$ в $D + S$, $|\frac{\partial U_\delta}{\partial n} + aU_\delta - \varphi| < \delta$ в точках границы S_1 , отстоящих от S_0 не меньше, чем на δ , и $|\frac{\partial U_\delta}{\partial n} + aU_\delta| < K$ на S , где постоянная K не зависит от δ . Пусть $u_{\varepsilon\delta}(x, y)$ — решение уравнения (1), для которого на границе S $\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial n} + au_{\varepsilon\delta} = \frac{\partial U_\delta}{\partial n} + aU_\delta$. Так как $|u_\varepsilon(x, y) - U(x, y)| \leq |u_\varepsilon(x, y) - u_{\varepsilon\delta}(x, y)| + |u_{\varepsilon\delta}(x, y) - U_\delta(x, y)| + |U_\delta(x, y) - U(x, y)|$, то, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что $|u_\varepsilon(x, y) - u_{\varepsilon\delta}(x, y)|$ будет как угодно мало, если ε и δ достаточно малы. Эта оценка проводится аналогично тому, как доказана теорема 1.

Для уравнения параболического типа

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = f(x, y), \quad (7)$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $f(x, y)$ — дважды дифференцируемые функции и $B(x, y) < 0$, можно доказать следующее предложение.

Теорема 3. Пусть область D ограничена отрезком (P, Q) оси OX , интегральными кривыми уравнения (5), проходящими через точки P и Q оси OX , и отрезком (P_1, Q_1) прямой $y = \beta > 0$. Пусть $u_\varepsilon(x, y)$ есть решение в области D уравнения (7), удовлетворяющее на (P, Q) условию $u_\varepsilon = \varphi(x)$ и на граничных кривых PP_1 и QQ_1 условию $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + au_\varepsilon = \varphi$, где a и φ — дважды дифференцируемые функции и $a \leq 0$ на PP_1 , $a \geq 0$ на QQ_1 . Тогда функции $u_\varepsilon(x, y)$ при ε , стремящемся к нулю, равномерно в $D + S$ сходятся к решению уравнения (3), которое на (P, Q) принимает значения $\varphi(x)$.

Поступило
3 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ О. А. Олейник, ДАН, 79, № 5, 735 (1951).