Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Действительный член Болгарской Академии наук Н. ОБРЕШКОВ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДЕКАРТА О МНИМЫХ КОРНЯХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 22 V 1952)

Докажем следующее новое обобщение классической теоремы Декарта.

Теорема 1. *Пусть уравнение*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (1)$$

с действительными коэффициентами имеет p *корней, аргументы которых находятся в интервале* $-\frac{\pi}{n+2-p} < \varphi < \frac{\pi}{n+2-p}$.

Тогда число перемен знаков у коэффициентов будет равно p *или больше, чем* p, *на четное число.*

Доказательство основывается на предложении А, данном мною в работе ([1]):

А. *Пусть* $\varphi(x)$ — *полином n-й степени с действительными коэффициентами, у которых число перемен равно* v.

Тогда число перемен у коэффициентов полинома

$$\varphi(x)(x^2 - 2\rho x\cos\varphi + \rho^2), \quad \rho > 0, \qquad -\frac{\pi}{n+2-v} < \varphi < \frac{\pi}{n+2-v}$$

не меньше $v+2$.

Пусть

$$x_k = \rho_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \bar{x}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

мнимые корни полинома (1), у которых аргументы $\varphi_k \neq 0$ лежат в интервале $\left(-\frac{\pi}{n+2-p}, \frac{\pi}{n+2-p}\right)$. Обозначим через

$$\psi(x) = a_0x^m + a'_1x^{m-1} + \cdots a'_m = 0$$

уравнение, которое имеет корнями остальные корни уравнения (1) с той же кратностью. Тогда будем иметь:

$$f(x) = \psi(x)\prod_{k=1}^{s}(x^2 - 2\rho_k x\cos\varphi_k + \rho_k^2), \quad n = m + 2s.$$

Обозначим через v_0 число перемен у коэффициентов $\psi(x)$ и через q — число положительных корней уравнения (1). Тогда, согласно теореме Декарта, будем иметь $v_0 \geqslant q$. Так как $m + 2 - v_0 \leqslant n + 2 - p$, то получим

$$\frac{\pi}{m+2-v_0} \geqslant \frac{\pi}{n+2-p}.$$

Согласно предложению А, число перемен v_1 у коэффициентов полинома

$$\psi_1(x) = \psi(x)(x^2 - 2\rho_1 x\cos\varphi_1 + \rho_1^2)$$

будет

$$v_1 \geqslant v_0 + 2.$$

Вообще, обозначим через $\psi_h(x)$ полином

$$\psi_h(x) = \psi(x) \prod_{k=1}^{h} (x^2 - 2\rho_k x \cos\varphi_k + \rho_k^2)$$

и через v_h — число перемен его коэффициентов. Мы доказали, что $v_1 \geqslant v_0 + 2$. Предположим, что $v_h \geqslant v_0 + 2h$ для некоторого $h \leqslant s - 1$. Установим, что и

$$v_{h+1} \geqslant v_0 + 2(h+1).$$

Так как $m + 2h + 2 - v_h \leqslant n + 2 - p$, то получаем

$$\frac{\pi}{m + 2h + 2 - v_h} \geqslant \frac{\pi}{n + 2 - p}.$$

Согласно предложению А будем иметь

$$v_{h+1} \geqslant v_h + 2 \geqslant v_0 + 2(h+1).$$

При $h = s$ получаем теорему 1.

Из теоремы 1 легко получить теорему, установленную нами ранее [1]:

Пусть

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами, число перемен знаков которых равно v.

Тогда число корней, у которых аргументы находятся в интервале $-\frac{\pi}{n-v} < \varphi < \frac{\pi}{n-v}$, будет равно v или меньше v на четное число.

Действительно, пусть p есть число корней этого уравнения, расположенных внутри угла $\left(-\frac{\pi}{n-v}, \frac{\pi}{n-v}\right)$. Предположим, что $v < p$, т. е. $v \leqslant p - 2$ (четность разности $v - p$ тривиальна). Будем иметь $\frac{\pi}{n+2-p} \geqslant \frac{\pi}{n-v}$.

Но тогда из теоремы 1 следует $v \geqslant p$, что противоречит предположению. При помощи замены $x = -y$ получаем из теоремы 1 следующее следствие:

Если уравнение (1) *имеет q корней, у которых аргументы находятся в интервале $\pi - \frac{\pi}{n+2-q} < \varphi < \pi + \frac{\pi}{n+2-q}$, то число перемен у коэффициентов полинома $f(-x)$ будет равно q или больше q на четное число.*

Заметим, что к рассмотренным интервалам $-\frac{\pi}{n+2-p} < \varphi < \frac{\pi}{n+2-p}$, $-\frac{\pi}{n-v} < \varphi < \frac{\pi}{n-v}$ в теореме 1 не всегда можно присоединить их концы. Так, уравнение $x^n + 1 = 0$ имеет два корня $\cos\frac{\pi}{n} \pm i \sin\frac{\pi}{n}$ с аргументом $\pm\frac{\pi}{n}$, но в нем нет перемен знаков коэффициентов.

При помощи преобразования Якоби $y = \frac{x - \alpha}{\beta - x}$ получаем непосредственно из теоремы 1 следующее предложение:

Пусть α и β — два произвольных действительных числа и C_1 и C_2 — две окружности, проходящие через точки α и β и пересекаю-

щие отрезок (α, β) *под углом* $\frac{\pi}{n+2-p}$. *Обозначим через* D *общую часть кругов* C_1 *и* C_2. *Предположим, что уравнение* (1) *имеет* p *корней в области* D.

Тогда число перемен у коэффициентов полинома

$$(1+y)^n f\left(\frac{\alpha+\beta y}{1+y}\right)$$

будет равно p *или больше* p *на четное число.*

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет* p *корней, у которых аргументы находятся в интервале* $\left(-\frac{\pi}{n+2-p}, \frac{\pi}{n+2-p}\right)$, *а аргументы остальных корней находятся в интервале* $\left(\pi-\frac{\pi}{p+2}, \pi+\frac{\pi}{p+2}\right)$.

Тогда число перемен его коэффициентов будет точно равно p.

Согласно теореме 1 имеем $v \geqslant p$. Допустим, что $v > p$, т. е. $v \geqslant p+2$. Уравнение $f(-x)=0$ имеет $q=n-p$ корней с аргументами в интервале $\left(-\frac{\pi}{p+2}, \frac{\pi}{p+2}\right)$, т. е. в интервале $\left(-\frac{\pi}{n+2-q}, \frac{\pi}{n+2-q}\right)$. Число v_1 перемен $f_1(-x)$ будет $v_1 \geqslant q$. Но тогда $v+v_1 \geqslant p+q+2=n+2$, что невозможно.

В частном случае $p=1$ получаем предложение С. Липка [2], полученное им из моего вспомогательного предложения А.

Отметим еще, что при выполнении условий теоремы 2 в уравнении (1) два соседних коэффициента не могут быть одновременно равны нулю и, если один из промежуточных коэффициентов равен нулю, то соседние коэффициенты будут иметь противоположные знаки. Действительно, в противном случае сумма перемен коэффициентов $f(x)$ и $f(-x)$ были бы меньше степени n уравнения (1), что противоречит теореме 2.

Мало дал [3] следующую интересную теорему:

Пусть уравнение

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0 \tag{2}$$

имеет только действительные корни и уравнение

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_1x^2+\cdots+b_mx^m=0 \tag{3}$$

имеет только действительные корни одного знака.

Тогда уравнение

$$\psi(x)=a_0b_0+a_1b_1x+a_2b_2x^2+\cdots+a_kb_kx^k=0, \tag{4}$$

где $k=\min(n, m)$, *имеет только действительные корни.*

Мы дадим обобщение этой теоремы, основываясь на теореме 2.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (2) *с действительными коэффициентами имеет* p *корней с аргументами в интервале* $-\frac{\pi}{n+m+2-p}<\varphi<\frac{\pi}{n+m+2-p}$ *и пусть аргументы остальных его корней находятся в интервале* $\pi-\frac{\pi}{m+p+2}<\varphi<\pi+\frac{\pi}{m+p+2}$. *Пусть уравнение* (3) *с действительными коэффициентами имеет корни только в пределах* $(\pi-\alpha, \pi+\alpha)$, *где* $\alpha=\min\left(\frac{\pi}{n+2-p}, \frac{\pi}{p+2}\right)$.

Тогда уравнение (4), *где* $k=\min(n, m)$, *имеет только действительные корни.*

Доказательство. Следуя по пути Мало, образуем уравнение

$$F(z)=z^m\varphi\left(\frac{x}{z}\right)f(z)=A_0z^{n+m}+A_1z^{n+m-1}+\cdots+A_{n+m}=0.$$

Коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \ldots$ суть полиномы:

$$A_0 = a_n b_0,$$
$$A_1 = a_n b_1 x + a_{n-1} b_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = a_k b_k x^k + a_{k-1} b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_0 b_0 = \psi(x).$$

Согласно условиям теоремы, уравнение $F(z) = 0$ степени $n + m$ имеет при $x > 0$ p корней с аргументами в пределах $-\frac{\pi}{n+m+2-p} < \varphi < \frac{\pi}{n+m+2-p}$; аргументы остальных его корней лежат в интервале $\pi - \frac{\pi}{p+2} < \varphi < \pi + \frac{\pi}{p+2}$. При $x < 0$ то же уравнение имеет $p + m$ корней с аргументами, лежащими в интервале $-\frac{\pi}{n+2-p} < \varphi < \frac{\pi}{n+2-p}$, а остальные его корни лежат внутри угла $\left(\pi - \frac{\pi}{m+p+2}, \ \pi + \frac{\pi}{m+p+2}\right)$. Согласно следствию из теоремы 2 последовательность

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n \tag{5}$$

имеет при $x > 0$ и при $x < 0$ свойства цепи Штурма. Легко видеть, что то же самое остается в силе и для $x = 0$. Непосредственно проверяется, что разность числа перемен последовательности (5) для $x = -\infty$ и числа перемен (5) для $x = \infty$ будет по абсолютному значению равна k. По теореме Штурма уравнение $A_n = 0$ имеет не меньше k действительных корней, т. е. все его корни действительны.

Частный случай, когда $p = n$, особенно интересен.

Если уравнение

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

имеет корни только внутри угла $-\frac{\pi}{m+2} < \varphi < \frac{\pi}{m+2}$ и уравнение

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m = 0$$

или уравнение $\varphi(-x)$ имеет корни только внутри угла $-\frac{\pi}{n+2} < \varphi < \frac{\pi}{n+2}$, то уравнение

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \cdots + a_k b_k x^k = 0, \quad k = \min(n, m),$$

имеет только действительные корни.

Отметим еще, что теорема 3 интересна тем, что из уравнений, имеющих мнимые корни, получается комбинированное уравнение, имеющее только действительные корни.

Математический институт
Болгарской Академии наук

Поступило
14 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Обрешков, Годишник на Софийския университет, **19**, 45 (1922—1923); Jahresber. Deutsch. Math. Ver., **33**, 52 (1924). [2] St. Lipka, Math. Zs., **47**, 343 (1941). [3] E. Malo, J. de Math. Spéc., (4), 4 (1895).