Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 3

МАТЕМАТИКА

О. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 V 1952)

Пусть в конечном цилиндре $Q = \Omega X [0 \leqslant t \leqslant l]$, основанием которого служит связная область Ω пространства $X = (x_1, \ldots, x_n)$, задано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(X)\, u + f(X, t) = Lu + f, \tag{1}$$

удовлетворяющее следующему условию гиперболичности:

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0,$$

при любых вещественных $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Для этого уравнения рассмотрим следующую смешанную задачу: определить в Q решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(X), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(X)$$

и условию

$$u\,\Big|_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

на границе Γ области Ω.

Всем поставленным требованиям формально удовлетворяет ряд Фурье

$$u(X, t) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[a_s \cos\lambda_s t + b_s \sin\lambda_s t + \frac{1}{\lambda_s}\int_0^t f_s(\tau)\sin\lambda_s(t-\tau)\, d\tau\right] v_s(X), \tag{3}$$

в котором $v_s(X)$ суть собственные функции оператора L при граничном условии (2), а

$$a_s = \int_\Omega \varphi v_s dX, \quad b_s = \frac{1}{\lambda_s}\int_\Omega \psi v_s dX, \quad f_s(t) = \int_\Omega f(X, t)\, v_s dX.$$

Мы исследуем характер сходимости ряда (3) и тем самым выясняем, когда сумма ряда дает решение задачи в том или ином смысле.

Введем обозначения для некоторых классов функций. Через $W_2^k(\Omega)$ обозначим совокупность функций $v(x_1, \ldots, x_n)$, квадратично суммируемых (в смысле Лебега) по Ω и имеющих обобщенные производные (в смысле С. Л. Соболева) по $x_1, \ldots, x_n$ до k-го порядка включительно, квадратично суммируемые по Ω. В эту совокупность введем норму

$$\| v \|_{W_2^k(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega \sum_{l=0}^{k} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l = 1}^{n} \left(\frac{\partial^l v}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_l}} \right)^2 dX \right\}^{1/2}.$$

При $k = 0$ $W_2^k(\Omega)$ принято обозначать $L_2(\Omega)$. Подпространство $W_2^1(\Omega)$, являющееся замыканием по норме $W_2^1(\Omega)$ множества непрерывно дифференцируемых по $x_1, \ldots, x_n$ функций, равных нулю вблизи границы Ω, обозначим $\overset{0}{D}(\Omega)$. Пространство $W_2^1(Q)$, являющееся замыканием по норме $W_2^1(Q)$ множества непрерывно дифференцируемых по $x_1, \ldots, x_n, t$ функций, равных нулю вблизи боковой поверхности цилиндра Q, обозначим $\overset{0}{D}_1(Q)$. Обозначим, далее, через $W_2^k(\Omega, t)$ совокупность функций $v(X, t)$, определенных в Q и имеющих обобщенные производные по $x_1, \ldots, x_n, t$ до k-го порядка включительно, квадратично суммируемые, как и сами функции, по Ω при всех $t \in [0, l]$. В эту совокупность введем норму

$$\| v \|_{W_2^k(\Omega, t)} = \left\{ \int_\Omega \sum_{l=0}^{k} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l = 0}^{n} \left(\frac{\partial^l v}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_l}} \right)^2 dX \right\}^{1/2}, \quad \text{где } x_0 \equiv t.$$

Введем следующее определение. Функцию $u(X, t)$ назовем **о б о б щ е н н ы м р е ш е н и е м** в Q поставленной выше смешанной задачи, если она принадлежит $\overset{0}{D}_1(Q)$, при $t = 0$ равна φ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega \int_0^l \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - au\Phi + f\Phi \right] dX\, dt + \int_\Omega \psi \Phi \big|_{t=0} dX = 0$$

при любой функции $\Phi(X, t)$ из $\overset{0}{D}_1(Q)$, равной нулю на верхнем основании цилиндра (т. е. при $t = l$).

Справедлива следующая теорема единственности:

Т е о р е м а 1. *Если a_{ij} и a суть ограниченные, измеримые функции, а Ω — конечная, связная область в пространстве $x_1, \ldots, x_n$, то смешанная задача не может иметь больше одного обобщенного решения.*

Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда с помощью прямых методов вариационного вычисления легко доказывается ([1,2]), что оператор L при граничном условии (2) имеет счетное множество собственных чисел $-\lambda_1^2 \geqslant -\lambda_2^2 \geqslant \ldots$ и соответствующих им обобщенных собственных функций $v_1, v_2, \ldots$, которые определяются нижеследующим образом. Функции v_k принадлежат $\overset{0}{D}(\Omega)$ и удовлетворяют интегральным тождествам

$$\int_\Omega \left[\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + a v_k \zeta \right] dX = \lambda_k^2 \int_\Omega v_k \zeta\, dX$$

при любой функции ζ из $\overset{0}{D}(\Omega)$.

Переходим теперь к рядам Фурье. Для них справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Если* a_{ij} *и* a *суть измеримые, ограниченные на* Ω *функции, а* Ω — *конечная, связная область в пространстве* $x_1, \ldots, x_n$, *и если* $\varphi \in \overset{0}{D}(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, *а* $f \in L_2(Q)$, *то ряд* (3) *сходится в* $W_2^1(\Omega, t)$ *равномерно относительно* $t \in [0, l]$. *Сумма рядов* $u(X, t)$ *есть элемент* $\overset{0}{D}(\Omega)$, *непрерывно зависящий от* $t \in [0, l]$*. *Функция* $u(X, t)$ *дает обобщенное решение смешанной задачи, причем* $\int\limits_{\Omega} [(u(X, \Delta t) - \varphi)^2 + (u_t(X, \Delta t) - \psi)^2]\, dX \to 0$ *при* $\Delta t \to +0$. *Если* $u_1(X, t)$ *есть обобщенное решение этой же смешанной задачи для уравнения* (1) *со свободным членом* $f_1 \in L_2(Q)$, *отвечающее начальным функциям* $\varphi_1 \in \overset{0}{D}(\Omega)$ *и* $\psi_1 \in L_2(\Omega)$, *то*

$$\| u - u_1 \|_{W_2^1(\Omega, t)} \leqslant C \{ \| \varphi - \varphi_1 \|_{W_2^1(\Omega)} + \| \psi - \psi_1 \|_{L_2(\Omega)} + \| f - f_1 \|_{L_2(Q)} \}, \tag{4}$$

причем C *не зависит от* $t \in [0, l]$.

Если $f \equiv 0$, *то ряд*

$$\sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos \lambda_s t + b_s \sin \lambda_s t)\, v_s(X)$$

сходится в $W_2^1(\Omega)$ *равномерно относительно* $t \in (-\infty, \infty)$ *и постоянная* C *в неравенстве* (4) *может быть выбрана общей для всех* t.

Пусть k есть какое-нибудь натуральное число $\geqslant 2$. Предположим, что коэффициенты a_{ij} и a имеют в $\overline{\Omega}$ непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n$ порядков $k-1$ и $k-2$, соответственно **, а граница Γ состоит из конечного числа замкнутых поверхностей, каждая из которых k раз непрерывно дифференцируема. Пусть, далее, обобщенные собственные функции $v_1, v_2, \ldots$ оператора L имеют в $\overline{\Omega}$ непрерывные производные k-го порядка. При этих условиях имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы ряд Фурье*

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos \lambda_s t + b_s \sin \lambda_s t)\, v_s(X), \tag{5}$$

в котором $a_s = \int\limits_{\Omega} \varphi v_s dX$, $b_s = \frac{1}{\lambda_s} \int\limits_{\Omega} \psi v_s dX$, *и ряды, полученные его почленным дифференцированием по* x_i *и* t *до* k *раз включительно, сходились в* $L_2(\Omega)$ *равномерно относительно* $t \in (-\infty, \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi \in W_2^k(\Omega)$, $\psi \in W_2^{k-1}(\Omega)$ *и функции*

$$\varphi, L\varphi, \ldots, L^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\varphi, \psi, L\psi, \ldots, L^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\psi \in \overset{0}{D}(\Omega). \tag{6}$$

Если φ *и* ψ *удовлетворяют этим условиям, то сумма ряда* u *является не только обобщенным решением задачи (при* $f = 0$*), но и элементом* $W_2^k(\Omega, t)$, *непрерывно зависящим от* $t \in (-\infty, \infty)$, *при всех* t *удовлетворяет почти всюду на* Ω *однородному уравнению* (1)

---

* Точнее, $\| u(X, t) - u(X, t + \Delta t) \|_{W_2^1(\Omega, t)} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ и $t \in [0, l]$.

** При $k = 2$ относительно $a(X)$ требуем, чтобы она была ограничена и измерима.

и $\|u(X, \Delta t) - u(X, 0)\|_{W_2^k(\Omega, t)} \to 0$ *при* $\Delta t \to +0$, *где* $u(X, 0)$ *вычислено, исходя лишь из функций* φ *и* ψ *и уравнения* (1) (*с* $f \equiv 0$).

При $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 + m$ ряд (5) и ряды, полученные его почленным дифференцированием по x_i и t до m раз включительно, сходятся равномерно относительно $X \in \bar{\Omega}$ и $t \in (-\infty, \infty)$, и потому сумма ряда (5) при $m \geqslant 2$ будет классическим решением смешанной задачи.

Требования (6) выражают условия согласования начальных и граничных функций. Решение u обладает устойчивостью в метрике $W_2^k(\Omega, t)$ на всей оси t. Именно, если через u_1 мы обозначим решение, соответствующее начальным функциям φ_1 и ψ_1, которые удовлетворяют тем же условиям, что и функции φ и ψ в теореме 3, то можно показать, что:
при $k = 2r$

$$\|u - u_1\|_{W_2^k(\Omega, t)} \leqslant C\{\|L^r(\varphi - \varphi_1)\|_{L_2(\Omega)} + \|L^{r-1}(\psi - \psi_1)\|_{W_2^1(\Omega)}\},$$

а при $k = 2r + 1$

$$\|u - u_1\|_{W_2^k(\Omega, t)} \leqslant C\{\|L^r(\varphi - \varphi_1)\|_{W_2^1(\Omega)} + \|L^r(\psi - \psi_1)\|_{L_2(\Omega)}\},$$

причем C не зависит от t и определяется лишь формой области Ω и коэффициентами L.

Доказательство теоремы 3, в основном, опирается на лемму, установленную автором и сформулированную в заметке ([3]) (теорема 3 заметки ([3])).

Результаты данной заметки для волнового уравнения опубликованы автором в ([4]), а для разбираемого здесь случая доложены на заседании Московского математического общества ([5]).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
7 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, гл. VII, 1951. [2] С. Г. Михлин, Проблема квадратичного функционала, 1952. [3] О. А. Ладыженская, ДАН, 79, № 5 (1951). [4] О. А. Ладыженская, ДАН, 75, № 6 (1950). [5] О. А. Ладыженская, Усп. матем. наук, 6, в. 1 (41) (1951).