Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 3

*МАТЕМАТИКА*

В. Д. ИЗМАЙЛОВ

# ОБ ИНВАРИАНТНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ ШЕСТИМЕРНОГО АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 26 V 1952)*

1. В настоящей статье дается построение инвариантной геометрии на двумерных поверхностях $X_2$ в шестимерном аффинном пространстве $E_6$.

Рассмотрим вначале случай эквиаффинного $E_6$. Пусть $X_2$ задана в $E_6$ уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$. Предположим, что частные производные $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_{ik}$ линейно независимы и что $X_2 \sqsubset E_5$ * (поверхности общего вида). Тогда экстенсив $\lambda_{ikl} = (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_{11} \mathbf{r}_{12} \mathbf{r}_{22} \mathbf{r}_{ikl})$ не обращается в нуль тождественно. Легко доказать, пользуясь известной теоремой теории алгебраических инвариантов ([3], стр. 155), что $\lambda_{ikl}$ есть поле тензорной плотности веса 4.

Теорема 1. *Система величин*

$$\mu_{ik} \equiv 2^2 \lambda_{[1[1|i} \lambda_{k|2]2]} \tag{1}$$

*образует поле симметрической плотности веса* 10.

Доказательство вытекает из того, что (1) с точностью до скалярного множителя совпадает с выражением $\varepsilon^{pq}\varepsilon^{sr}\lambda_{psi}\lambda_{qrk}$, где $\varepsilon^{ij}$ — произвольный бивектор в $X_2$.

Будем предполагать вначале, что $\mu_{ik}$ не вырождается. Тогда $\gamma_{ik} \equiv \dfrac{\mu_{ik}}{|\mu|^{5/11}}$, где $|\mu|$ обозначает модуль определителя $\mu \equiv |\mu_{ik}|$, есть невырождающийся тензор. В дальнейшем он используется как версор. Нормируя аналогичным образом $\lambda_{ikl}$, мы определяем на $X_2$ тензорное поле $\beta_{ikl} \equiv \dfrac{\lambda_{ikl}}{|\mu|^{2/11}}$. Тензор $\gamma_{ik}$ будем называть ассоциированным с $\beta_{ikl}$ **.

Легко проверить тождества аполярности: $\beta^{ikl}\gamma_{ik} = 0$, $\beta_{ikl}\gamma^{ik} = 0$.

2. Пусть $\Gamma^l_{ik}$ — компоненты аффинной связности, определяемой тензором $\gamma_{ik}$. Ковариантное дифференцирование относительно этой связ-

* Если $\alpha^{ik}\mathbf{r}_{ik} + \alpha^l \mathbf{r}_l = 0$, то мы находимся в условиях применения метода Бурстина — Майера для $X_2$ в $E_4$, годного и в данном случае для построения из $\alpha^{ik}$ аффинно-инвариантного тензора на поверхности ([1]). Для $X_2$ в $E_5$ применим метод Г. Ф. Лаптева ([2]).

** Интересно, что тензор, ассоциированный с тензором основной кубической формы $X_2$ в аффинном $E_3$, как легко показать, равен $I\pi_{ik}$, где $\pi_{ik}$ — основной квадратичной формы, $I$ — инвариант Пика.

ности будем обозначать знаком $|$. Введем $\overset{*}{\beta}{}^{abc} \equiv \beta_{ikl}\varepsilon^{ai}\varepsilon^{bk}\gamma^{cl}$, где $\varepsilon^{ij}$ — дискриминантный тензор для $\gamma^{ij}$.

Справедливо тождество:

$$\overset{*}{\beta}{}^{abc}\beta_{abc} = 2. \tag{2}$$

Построим теперь следующее оснащение $X_2$ в $E_6$:

$$\mathbf{H}_{ik} \equiv \mathbf{r}_{i|k}; \tag{3$^1$}$$

$$\mathbf{n} = {}^1/_2\, \mathbf{r}_{i|kl}\overset{*}{\beta}{}^{ikl}. \tag{3$^2$}$$

В силу (2), линейной независимости $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_{ik}$, определения тензоров $\gamma_{ik}$ и $\beta_{ikl}$ и неравенства $\gamma \neq 0$, векторы $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{H}_{ik}$, $\mathbf{n}$ образуют репер:

$$(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{H}_{11}\mathbf{H}_{12}\mathbf{H}_{22}\mathbf{n}) = \gamma^2. \tag{4}$$

Линейное пространство $\mathfrak{N}\{\mathbf{H}_{ik}, \mathbf{n}\}$, очевидно, инвариантно, причем подпространство $\mathfrak{M}\{\mathbf{H}_{ik}\}$ также инвариантно. Мы будем называть $\mathfrak{N}$ аффинным нормальным пространством, а связность $\Gamma^l_{ik}$, индуцируемую им на $X_2$, следуя А. М. Лопшицу, назовем внутренней связностью поверхности ([4]). Легко видеть, что $\tilde{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{ik}$.

Теорема 2. *Риманов тензор внутренней связности поверхности общего вида отличен от нуля.*

Пусть, напротив, существует $X_2$ общего вида, для которой $R^s_{ikl} = 0$. Так как связность риманова, то, в силу нашего предположения, на $X_2$ можно выбрать систему координат так, чтобы $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 1$, $\gamma_{12} = 0$. Тогда из определения $\gamma_{ik}$ и $\beta_{ikl}$ вытекает, что $\beta_{i11} + \beta_{i22} = 0$ ($i = 1, 2$), а из тождеств аполярности следует:

$$\beta_{111}\beta_{221} - \beta_{112}^2 = \frac{1}{2^3}; \quad \beta_{111}\beta_{222} - \beta_{112}\beta_{122} = 0; \quad \beta_{112}\beta_{222} - \beta_{122}^2 = \frac{1}{2^3}.$$

Совместное выполнение всех этих равенств невозможно в действительной области.

Дадим геометрическую интерпретацию кубической формы $\varphi \equiv \beta_{ikl}dx^i dx^k dx^l$. Пусть $M$ и $M'$ — две бесконечно близкие точки на $X_2$, а $M^*$ — точка пересечения нормального направления $\mathbf{n}$ в точке $M'$ с соприкасающейся плоскостью $S_5\{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{ik}\}$ к поверхности в точке $M$. Пусть $p \equiv \frac{\overrightarrow{M^*M'}}{\mathbf{n}}$. Разлагая $\Delta\mathbf{r} = \overrightarrow{MM'}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $M$ и умножая полученное равенство на $\frac{[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_{11}\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{22}]}{\gamma^2}$, получим: $p = {}^1/_6\,\varphi + \ldots$ Отсюда следует, что в нулевых направлениях формы $\varphi$ $S_5$ имеет с $X_2$ соприкосновение более высокого порядка, чем в других направлениях.

3. Разложение производных от векторов репера (3) по самому этому реперу будем называть формулами Френе:

$$\mathbf{r}_{a|b} = \mathbf{H}_{ab}, \tag{5$^1$}$$

$$\mathbf{H}_{ab|c} = L^{ik}_{abc}\mathbf{H}_{ik} + K^l_{abc}\mathbf{r}_l + \Phi_{abc}\mathbf{n}; \tag{5$^2$}$$

$$\mathbf{n}_{|a} = \omega^l_a\mathbf{r}_l + \varphi^{ik}_a\mathbf{H}_{ik} + \psi_a\mathbf{n}. \tag{5$^3$}$$

Нетрудно доказать, что $\Phi_{ikl} = \beta_{ikl}$ (из ($5^2$) и ($3^2$)). Кроме того, имеет место равенство $K^a_{i[kl]} = R^a_{ikl}$, к которому мы придем, если сравним разложения $\mathbf{r}_{ikl}$ по реперу (3) с разложением ($5^2$).

Из (5) далее следует: $K^a_{ikl}\overset{*}{\beta}{}^{ikl} = 0$, $L^{ab}_{ikl}\overset{*}{\beta}{}^{ikl} = 0$, а дифференцирование (4) дает: $L^{ik}_{ikl} + \psi_l = 0$. Подсчет показывает, что тензоры в (5) связаны еще условиями интегрируемости, которые мы из-за громоздкости не выписываем здесь и при ссылках называем условиями $Z$. Их рассмотрение показывает, что тензоры $\omega$, $\varphi$, $\psi$ выражаются через $\beta$, $L$, $K$. Последнюю систему назовем полной системой тензоров поверхности.

Теорема 3. *Пусть дана система тензоров* $\beta_{ikl}$, $L^{ab}_{ikl}$, $K^a_{ikl}$, *удовлетворяющая следующим условиям*: a) *тензор* $\gamma_{ik}$, *ассоциированный с* $\beta_{ikl}$, *не вырождается*; b) $K^a_{i[kl]} = R^a_{ikl}$, *где* $R$ — *тензор кривизны связности тензора* $\gamma_{ik}$; c) $L^{ab}_{ikl}\overset{*}{\beta}{}^{ikl} = K^a_{ikl}\overset{*}{\beta}{}^{ikl} = 0$; d) $L^{ik}_{ikl} + \psi_l = 0$; e) *система удовлетворяет тем из условий* $Z$, *которые не зависят от предыдущих.*

*Тогда указанная система определяет в* $E_6$ *с точностью до эквиаффинного преобразования в нем поверхность* $X_2$, *имеющую эту систему своей полной системой тензоров.*

Для доказательства рассмотрим смешанную систему уравнений, состоящую из (5) (где $\Phi_{ikl} = \beta_{ikl}$), (4) и уравнений $\mathbf{r}_{|a} = \mathbf{r}_a$.

В силу самих условий теоремы система эта вполне интегрируема. Задача лишь в надлежащем выборе начальных условий. Тензоры полной системы, вычисленные для искомого решения $\mathbf{r}$, в отличие от исходной системы $\beta$, $L$, $K$, будем обозначать через $'\beta$, $'L$, $'K$. Введем $\vartheta \equiv (\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{H}_{11}\mathbf{H}_{12}\mathbf{H}_{22}\mathbf{n}) - \gamma^2$. Используя правила дифференцирования плотности и формулы Френе, получим $\partial\vartheta / \partial x^s = 4\vartheta\Gamma^a_{as}$. Отсюда следует, что если начальные условия выбраны так, что в точке $M_0$ $\vartheta = 0$, то это равенство справедливо и в некоторой окрестности $M_0$.

Выполнение равенства $(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{H}_{11}\mathbf{H}_{12}\mathbf{H}_{22}\mathbf{n}) = \gamma^2$ означает линейную независимость $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_{ik}$, $\mathbf{n}$. Следовательно, $X_2$, определяемое найденным решением, $\overline{\subset} E_5$. Поэтому для найденной поверхности мы нашим методом можем построить нормальное пространство и систему $'\beta$, $'L$, $'K$.

Из ($5^2$) и (4) следует $'\beta_{ikl} = \alpha\beta_{ikl}$. Рассмотрение правил, по которым составляется $\beta_{ikl}$ из уравнения поверхности, показывает, что $\alpha = 1$. Отсюда легко получается доказательство совпадения $'L$ и $L$, $'K$ и $K$.

Общее решение зависит от 41 параметра. Геометрическую интерпретацию их мы получим, если заметим, что, наряду с решением $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{H}_{ik}$, $\mathbf{n}$, уравнениям (5) и $\mathbf{r}_{|a} = r_a$ удовлетворяют также

$$\tilde{\mathbf{r}} = A\mathbf{r} + \mathbf{b}; \quad \tilde{\mathbf{r}}_a = A\mathbf{r}_a; \quad \tilde{\mathbf{H}}_{ab} = A\mathbf{H}_{ab}; \quad \tilde{\mathbf{n}} = A\mathbf{n}, \tag{6}$$

где $A$ — оператор линейного преобразования с матрицей $A \equiv \| a^\beta_\alpha \|$. Чтобы удовлетворить также и уравнению (4), нужно положить $| a^\beta_\alpha | = 1$.

Так как имеется 41 параметр, то все 6 постоянных $b^a$ и 35 постоянных из $a^\beta_\alpha$ мы можем выбрать произвольно, что соответствует ограничению $| a^\beta_\alpha | = 1$.

Первое из уравнений (6) определяет в $E_6$ эквиаффинное преобразование. Теорема доказана.

4. Теорема 4. *Построенная внутренняя геометрия поверхности есть инвариант общей аффинной группы преобразований* $E_6$.

Действительно, при аффинном преобразовании с определителем $a \equiv | a^\nu_\mu |$ плотность $\lambda_{ikl} \equiv (\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_{11}\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{22}\mathbf{r}_{ikl})$, где в правой части теперь стоит просто определитель шестого порядка, изменяется по закону

$\tilde{\lambda}_{ikl} = \lambda_{ikl} \cdot a$. Следовательно, $\tilde{\gamma}_{ik} = \gamma_{ik} \cdot a^{2/_{11}}$. Так как $a = \text{const}$, то связность, определяемая тензором $\gamma_{ik}$, инвариантна при аффинном преобразовании. Отсюда следует инвариантность $\mathfrak{N}$, $L$, $K$.

Легко проследить для рассматриваемого случая $X_2$ в аффинном $E_6$ справедливость всей предыдущей теории, в частности, теоремы 3, правда, в слегка измененной формулировке, так как вектор $\mathbf{n}$ сохраняет теперь лишь направление.

5. Назовем индикатрисой кривизны в точке $M$ геометрическое место точек, описываемое концом вектора $\vec{\mathfrak{z}} = \varepsilon \mathbf{r}_{i|k} \dfrac{dx^i}{ds} \dfrac{dx^k}{ds}$, вычисленного для всевозможных кривых, проходящих через $M$ (здесь $ds^2 = \varepsilon \gamma_{ik} dx^i dx^k$, $\varepsilon = \pm 1$). $\vec{\mathfrak{z}}$ является «нормальной» составляющей вектора кривизны $\varepsilon \dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$. В качестве индикатрисы получается коническое сечение в $\mathfrak{M}$ с центром в конце вектора $^1/_2\, \gamma^{ik} \mathbf{r}_{i|k}$. Указанная классификация точек поверхности аффинно-инвариантна.

6. Требование, чтобы определитель $\mu$ плотности (1) был отличен от нуля, можно значительно ослабить.

Пусть $\mu = 0$. Тогда формулу $\mu_{ik}\, dx^i dx^k$ можно привести к виду $\mu_{11} (dx')^2$, т. е. $\mu_{12} = \mu_{22} = 0$. Но тогда, в силу (1), $\mu_{11}$ также равно нулю. Итак, при $\mu = 0$ все $\mu_{ik} = 0$. Это может иметь место в двух случаях: 1) $\lambda_{111} \neq 0$, все другие $\lambda_{ikl} = 0$; 2) все $\lambda_{ikl} \neq 0$ (остальные случаи несовместимы с равенством $\mu_{ik} = 0$).

В первом случае вопрос о построении инвариантного оснащения остается открытым. Во втором случае, используя равенства $\mu_{ik} = 0$, приводим формулу $\lambda_{ikl}\, dx^i dx^k dx^l$ к виду произведения квадратичной формы на линейную. Иначе говоря, $\lambda_{ikl}$ можно представить в виде $\lambda_{ikl} = \alpha_{ik} \nu_l$, где $\alpha_{ik}$ — положительно определенная невырождающаяся плотность. Ее можно использовать для построения инвариантной геометрии на $X_2$ по схеме начала настоящей статьи.

Рассмотренное в работе построение справедливо для $X_k$ в $E_n$, $n = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, $k = 2, 4, 6, \ldots$ Мы ограничились случаем $X_2$ в $E_6$ только ради простоты изложения.

Свердловский государственный
педагогический институт

Поступило
26 IV 1952

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Burstin u. W. Mayer, Math. Zs., 26, № 2—3, 273 (1927). [2] Г. Ф. Лаптев, О многообразиях геометрических элементов, Диссертация, М., 1950. [3] Г. Б. Гуревич, Основы теории алгебраических инвариантов, М.—Л., 1948. [4] А. М. Лопшиц, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 8 (1950).