Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Ю. И. ГРОСБЕРГ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА Б. Г. ГАЛЕРКИНА К ЗАДАЧАМ С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 22 V 1952)

1. Как известно, метод Б. Г. Галеркина был предложен его автором для решения краевых задач при однородных краевых условиях и для определения собственных значений таких задач. Следуя этому методу, решение ищут в виде линейной комбинации так называемых «координатных функций», каждая из которых удовлетворяет краевым условиям задачи. Я. И. Перельман ([1]), рассматривая только самосопряженные уравнения, применял метод Б. Г. Галеркина с координатными функциями, могущими не удовлетворять краевым условиям 2-го и 3-го рода.

Сходимость метода Б. Г. Галеркина была впервые доказана М. В. Келдышем в ([2]). Позднее Л. В. Канторович ([3]) и С. Г. Михлин ([4]) сформулировали результаты М. В. Келдыша в абстрактной форме и несколько обобщили их. Однако доказательства всех этих авторов существенно опираются на предположение о том, что координатные функции удовлетворяют краевым условиям. В частности, С. Г. Михлин в своей книге ([5]) называет результаты Я. И. Перельмана неточными и многократно подчеркивает необходимость выбирать координатные функции так, чтобы они удовлетворяли всем краевым условиям задачи.

В настоящей заметке мы покажем, что в случае эллиптических уравнений с краевыми условиями 2-го или 3-го рода координатные функции можно выбирать независимо от краевых условий и что метод Б. Г. Галеркина может быть применен также для решения задач с неоднородными краевыми условиями.

Замечание о выборе координатных функций применимо также при отыскании собственных значений соответствующих краевых задач.

2. Рассмотрим ограниченную область (Ω) в пространстве n измерений, имеющую кусочно-гладкую границу (Γ). В области (Ω) рассматривается эллиптическое дифференциальное уравнение

$$L[u] \equiv \sum_{k,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{j,\,k}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = f(x), \qquad (1)$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\Omega),$$

а на границе (Γ) задано краевое условие

$$\Lambda[u] \equiv \sum_{k,\,j=1}^{n} \cos(\widehat{\nu, x_k})\, a_{j,\,k} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \gamma u = \varphi(s), \quad s \in (\Gamma). \qquad (2)$$

Функции $a_{j,k}$ и их частные производные, а также функции b_k и c непрерывны в $(\Omega+\Gamma)$, функция γ ограничена на (Γ). Кроме того, квадратичная форма $\sum\limits_{k,j=1}^{n} a_{j,k}\xi_j\eta_k$ положительно определенна на $(\Omega+\Gamma)$.

Выберем систему функций (координатных функций)

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_k(x),\ \ldots, \tag{3}$$

заданных и дважды непрерывно-дифференцируемых в $(\Omega+\Gamma)$. Предположим, что система (3) полна в смысле сходимости в среднем самих функций и их градиентов.

Будем искать приближенное решение рассматриваемой задачи (1), (2) в виде

$$u^m(x)=\sum_{p=1}^{m} c_p u_p(x), \tag{4}$$

где коэффициенты c_p определяются из системы «уравнений Галеркина»

$$\sum_{p=1}^{m}\left\{\int\limits_{(\Omega)} L[u_p]\,u_q d\omega+\int\limits_{(\Gamma)}\Lambda[u_p]\,u_q d\sigma\right\}c_p=\int\limits_{(\Omega)} f u_q d\omega+\int\limits_{(\Gamma)}\varphi u_q d\sigma, \tag{5}$$

$$q=1,2,\ldots,m.$$

Теорема. *Если краевая задача* (1), (2) *имеет единственное решение* $u_0(x)$, *то система «уравнений Галеркина»* (5) *имеет при достаточно большом* m *отличный от нуля определитель. При этом функции* $u^m(x)$ *сходятся (в смысле сходимости в среднем функций и их градиентов) к функции* $u_0(x)$.

Заметим, что если краевые условия однородны ($\varphi\equiv 0$) и координатные функции удовлетворяют этим условиям, то уравнения (5) принимают обычный для метода Галеркина вид.

Если уравнение (3) самосопряженное, то уравнение (5) совпадает с уравнениями, полученными по методу Ритца.

3. Изложим вкратце доказательство сформулированной теоремы. Следуя М. И. Вишику ([6]), рассмотрим два пространства Гильберта H_1 и H_2. Пространство H_1 состоит из функций $L_{2(\Omega)}$, имеющих обобщенные частные производные 1-го порядка, принадлежащие $L_{2(\Omega)}$. Скалярное произведение в H_1 определим так:

$$(u,v)=\int\limits_{(\Omega)}\left[\sum_{k,j=1}^{n} a_{j,k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}+uv\right]d\omega;\qquad u,v\in H. \tag{6}$$

Норма, определяемая этим скалярным произведением, очевидно, эквивалентна норме, определяемой равенством

$$\|u\|=\sqrt{\int\limits_{(\Omega)}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2+u^2\right]d\omega}\ ;\quad u\in H_1. \tag{7}$$

Таким образом, сходимость в пространстве H_1 совпадает со сходимостью в среднем функций и их градиентов.

Через H_2 обозначим ортогональную сумму пространств $L_{2(\Omega)}$ и $L_{2(\Gamma)}$. Элементами H_2 будут пары функций $\{f(x); \varphi(x)\}$, $f \in L_{2(\Omega)}$, $\varphi \in L_{2(\Gamma)}$. Скалярное произведение в H_2 определяется формулой

$$[\{f; \varphi\}, \{g; \psi\}] = \int\limits_{(\Omega)} f \cdot g \, d\omega + \int\limits_{(\Gamma)} \varphi \cdot \psi \, d\sigma. \tag{8}$$

Рассмотрим два оператора A и T, заданные в H_1 и имеющие область значений в H_2. Оператор A определим на множестве D_A всех функций из H_1, имеющих обобщенные частные производные 2-го порядка, принадлежащие $L_{2(\Omega)}$, формулой

$$A[u] = -\left\{ \sum_{k, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{j, k} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - u; \ \sum_{k, j=1}^{n} \cos(\nu, x_k)\, a_{j, k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\}. \tag{9}$$

Оператор T определим на всем H_1 равенством

$$T[u] = \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - (c+1)\, u; \gamma u \right\}. \tag{10}$$

Сравнивая эти формулы с (1) и (2), получаем

$$A[u] + T[u] \equiv -\{L[u]; \Lambda[u]\}, \quad u \in D_A \subset H_1, \tag{11}$$

и наша краевая задача сводится к решению операторного уравнения

$$A[u] + T[u] = -\{f(x); \varphi(s)\}. \tag{12}$$

Оператор T, очевидно, ограничен в H_1. Для изучения функциональных свойств оператора A введем в рассмотрение оператор W вложения H_1 в H_2, определенный следующим образом: для каждого $u \in H_1$

$$W[u] = \{u(x); u(s)\}. \tag{13}$$

По известной теореме вложения С. Л. Соболева, если $u \in H_1$, то $u(x) \in L_{2(\Omega)}$ и $u(s) \in L_{2(\Gamma)}$, и потому $\{u(x); u(s)\} \in H_2$.)

Как показал М. И. Вишик (6), оператор A имеет обратный оператор A^{-1}, совпадающий с оператором, сопряженным к W:

$$A^{-1}[\{f; \varphi\}] = W^*[\{f; \varphi\}]. \tag{14}$$

Операторы A^{-1} и W^* заданы на H_2 и имеют область значений в H_1. При этом оператор $A^{-1} \equiv W^*$ абсолютно непрерывен.

Мы можем уравнение (12) переписать так

$$u + A^{-1}T[u] = -A^{-1}[\{f; \varphi\}], \tag{15}$$

и оператор $A^{-1}T$ есть абсолютно-непрерывный оператор на H_1.

По теореме Келдыша — Михлина к уравнению (14) применим метод Б. Г. Галеркина с любой последовательностью координатных функций $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$, принадлежащих H_1 и полной в нем. Другими словами: если уравнение (15) имеет единственное решение u_0 (являющееся в то же время решением данной краевой задачи), то система уравнений Галеркина, написанных для этого уравнения:

$$-\sum_{p=1}^{m}(u_p + A^{-1}T[u_p], u_q)\, c_p = (A^{-1}[\{f; \varphi\}], u_q) \quad (q = 1, 2 \ldots, m) \qquad (16)$$

при достаточно большом m разрешима и

$$u^m \equiv \sum_{p=1}^{m} c_p\, u_p \to u_0$$

в смысле сходимости в H_1.

Нам остается только показать, что если $u_p \in D_A$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то система уравнений (16) совпадает с системой (5). Действительно, на основании (11) и (13) мы получаем

$$-(u_p + A^{-1}T[u_p], u_q) = -(A^{-1}A[u_p] + A^{-1}T[u_p], u_q) =$$

$$= -(W^*A[u_p] + W^*T[u_p], u_q) = -[A[u_p] + T[u_p], W[u_q]] =$$

$$= [\{L[u_p]; \Lambda[u_p]\}, \{u_q; u_q\}] = \int\limits_{(\Omega)} L[u_p]\, u_q d\omega + \int\limits_{(\Gamma)} \Lambda[u_p]\, u_q d\sigma,$$

и аналогично

$$(A^{-1}[\{f; \varphi\}], u_q) = (W^*[\{f; \varphi\}], u_q) = [\{f; \varphi\}, W[u_q]] =$$

$$= [\{f; \varphi\}, \{u_q; u_q\}] = \int\limits_{(\Omega)} f \cdot u_q d\omega + \int\limits_{(\Gamma)} \varphi \cdot u_q d\sigma.$$

Поступило
22 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. И. Перельман, Прикладн. матем. и мех., 5, в. 2 (1941). [2] М. В. Келдыш, Изв. АН СССР, сер. матем., 6, № 6 (1942). [3] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, 3, в. 6 (1948). [4] С. Г. Михлин, ДАН, 61, № 2 (1948). [5] С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, 1950. [6] М. И. Вишик, ДАН, 81, № 5 (1951).