

Б. М. ГАГАЕВ

**ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 V 1952)

В настоящей работе рассматривается существование решений удовлетворяющих условиям Коши, систем интегро-дифференциальных уравнений.

Систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d^{m_s} y_s(x)}{dx^{m_s}} = L_s(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) + \lambda \int_a^b K_s(x, u) M_s(u, y_1(u), \dots, y_n(u)) du \quad (1)$$

$$(s = 1, 2, \dots, n),$$

где $L_s(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$ и $M_s(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$ — дифференциальные операторы, не обязательно линейные, содержащие производные $y_r(x)$ порядка ниже m_s , будем называть нормальной.

Легко показать, что всякая нормальная система интегро-дифференциальных уравнений при некоторых условиях относительно операторов $L_s(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$ и $M_s(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$ и ядер $K_s(x, u)$ имеет решения, удовлетворяющие условиям

$$y_s(a) = \alpha_s, \quad y_s^{(r)}(a) = \beta_{sr} \quad (r = 1, 2, \dots, m_{s-1}),$$

где α_s и β_{sr} — некоторые постоянные.

Систему (1) можно привести к следующему простому виду:

$$\frac{dz_s(x)}{dx} = P_s(x, z_1(x), \dots, z_N(x)) + \lambda \int_a^b G_s(x, u) Q_s(u, z_1(u), \dots, z_N(u)) du, \quad (2)$$

где $P_s(x, z_1(x), \dots, z_N(x))$ и $Q_s(x, z_1(x), \dots, z_N(x))$ — некоторые функции x, z_1, \dots, z_N , не содержащие производных, и $N = \sum_{s=1}^n m_s$.

Для этого достаточно положить

$$y_l(x) = z_l(x), \quad \frac{d^r y_l(x)}{dx^r} = z_l + \sum_{k=1}^{l-1} (m_k - 1) + r \quad (r = 1, 2, \dots, m_l - 1).$$

Если пределы интегралов в системе (1) не равны 0 и 1, то достаточно положить $x_1 = \frac{x-a}{b-a}$.

Заменой $v_s(x) = z_s(x) - \gamma_s$, где γ_s — некоторые постоянные, можно начальные условия привести к виду

$$v_s(0) = 0.$$

Относительно системы (2) нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Система интегро-дифференциальных уравнений (2), где $P_s(x, z_1, \dots, z_N)$ и $Q_s(x, z_1, \dots, z_N)$ непрерывны при $0 \leq x \leq 1$ и $|z_k| \leq C$ функции своих аргументов, не превосходящие по абсолютному значению B , а $G_s(x, u)$ удовлетворяют условиям, накладываемым на ядра в теории линейных интегральных уравнений, и для любых s и x

$$\int_0^1 |G_s(x, u)| du \leq D,$$

и при этом

$$B[1 + |\lambda|D] \leq C,$$

всегда имеет, по крайней мере, одну систему решений, обращающихся при $x = 0$ в нуль.

Из этой теоремы легко получить условия существования решений нормальной системы интегро-дифференциальных уравнений, удовлетворяющих при $x = 0$ условиям Коши.

Условие нормальности является существенным для существования решений, удовлетворяющих при $x = 0$ условиям Коши, как это можно видеть из простых примеров.

Пример.

$$y(x) = \lambda \int_0^1 \sin 2\pi x \sin 2\pi u y'(u) du + \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Очевидно, условия теоремы, кроме нормальности, удовлетворяются. Действительно, уравнение (3) переходит в систему

$$\frac{dz(x)}{dx} = z_1(x), \quad z(x) = \lambda \int_0^1 \sin 2\pi x \sin 2\pi u z_1(u) du + \frac{1}{2},$$

откуда правая часть уравнений при $|z_1(x)| < C$ при достаточно малом λ остается по абсолютному значению не больше C .

Однако уравнение (3) ни при каком λ не имеет решения, обращающегося при $x = 0$ в нуль. Действительно, очевидно, всякое решение уравнения (3) имеет вид

$$y(x) = A \sin 2\pi x + B.$$

Подстановка этого значения в уравнение (3) дает

$$A \sin 2\pi x + B = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, при любом λ уравнение (3) имеет единственное решение, которое при этом не обращается в нуль.

Для единственности решений, обращающихся при $x = 0$ в нуль, необходимо наложить дополнительные условия, хотя бы аналогичные условиям Липшица.

Нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 2. Система интегро-дифференциальных уравнений (2), где непрерывные относительно x функции P_s и Q_s удовлетворяют условиям

$$|P_s(x, z_1^{(2)}, \dots, z_N^{(2)}) - P_s(x, z_1^{(1)}, \dots, z_N^{(1)})| \leq B \sum_{k=1}^N |z_k^{(2)} - z_k^{(1)}|,$$

$$|Q_s(x, z_1^{(2)}, \dots, z_N^{(2)}) - Q_s(x, z_1^{(1)}, \dots, z_N^{(1)})| \leq B \sum_{k=1}^N |z_k^{(2)} - z_k^{(1)}|,$$

где B — некоторая постоянная, не зависящая ни от x ни от s , а ядра $G_s(x, u)$ удовлетворяют требованиям, налагаемым в теории линейных интегральных уравнений, и

$$\int_0^1 |G_s(x, u)| du \leq D,$$

причем D не зависит ни от x ни от s при условии, что

$$BN[1 + |\lambda|D] < 1,$$

имеет единственную систему решений, обращающуюся при $x = 0$ в нуль.

Эта система может быть получена путем последовательных приближений.

Можно условия единственности несколько обобщить, если в условиях постоянные B и D заменить такой неотрицательной функцией $B(x)$, что

$$\int_0^1 B(x) dx < B, \quad \int_0^1 \int_0^1 |G_s(y, u)| B(u) du dy < D$$

и при этом

$$BN[1 + |\lambda|D] < 1.$$

Можно и не предполагать функции $P_s(x, z_1(x), \dots, z_N(x))$ и $Q_s(x, z_1(x), \dots, z_N(x))$ непрерывными относительно x и доказать теорему существования решения, аналогичную теореме Каратеодори⁽¹⁾ существования интегралов дифференциальных уравнений, а именно, можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. Если функции $P_s(x, z_1, \dots, z_N)$ и $Q_s(x, z_1, \dots, z_N)$ ($s = 1, 2, \dots, n$) измеримы относительно x при постоянных z_k и непрерывны относительно совокупности z_k при постоянных x при $|x| \leq 1$ и $|z| \leq C$ и в этой области

$$|P_s(x, z_1(x), \dots, z_N(x))| \leq M(x),$$

$$|Q_s(x, z_1(x), \dots, z_N(x))| \leq M(x),$$

где $M(x)$ — измеримая неотрицательная на отрезке $[0, 1]$ функция, а ядра $G_s(x, u)$ удовлетворяют требованиям, налагаемым в теории линейных интегральных уравнений, причем

$$\int_0^1 M(x) dx + |\lambda| \int_0^1 \int_0^1 |G_s(y, u)| M(u) du dy \leq C,$$

то система интегральных уравнений

$$z_s(x) = \int_0^x P_s(u, z_1(u), \dots, z_N(u)) du + \\ + \lambda \int_0^x \int_0^1 G_s(y, u) Q_s(u, z_1(u), \dots, z_N(u)) du dy \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

имеет при $|x| \leq 1$ систему решений, являющихся абсолютно-непрерывными функциями.

Следовательно, система интегро-дифференциальных уравнений (2) имеет почти всюду систему решений, обращающихся в нуль при $x = 0$.

Доказательства теорем 1—3 могут быть приведены обычным в теории применения принципа неподвижных точек методом (см., например, доказательства аналогичных теорем в работах В. В. Немыцкого⁽²⁾).

Поступило
1 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Caratheodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 2-е Aufl., 1918, S. 665; М. Ф. Бокштейн, Уч. зап. Моск. гос. ун-та, в. 14, Математика, 7 (1939).
² В. В. Немыцкий, Матем. сборн., 1 (43) (1936); ДАН, 15, № 1 (1937).