

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

**КОНСТРУКТИВНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ
С СИЛЬНЫМ ОТРИЦАНИЕМ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 12 V 1952)

В 1950 г. А. А. Марковым ⁽¹⁾ было построено логико-арифметическое исчисление, охватывающее, наряду с обычными логическими операциями: импликацией \supset , конъюнкцией $\&$, дизъюнкцией \vee , отрицанием \neg и кванторами общности \forall и существования \exists , также операцию «сильного» («конструктивного») отрицания (обозначаемого через \sim) ⁽²⁾.

Из правил истолкования в этом исчислении всех перечисленных логических операций вытекает общезначимость логических формул следующих видов:

1. $(P \supset (Q \supset P))$.
2. $((P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R)))$.
3. $(P \supset (Q \supset (P \& Q)))$.
4. $((P \& Q) \supset P)$.
5. $((P \& Q) \supset Q)$.
6. $((P \supset Q) \supset ((R \supset Q) \supset ((P \vee R) \supset Q)))$.
7. $(P \supset (P \vee Q))$.
8. $(Q \supset (P \vee Q))$.
9. $((P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg P))$.
10. $(\neg P \supset (P \supset Q))$.
11. $(\sim P \supset (P \supset Q))$.
12. $(\sim (P \supset Q) \supset (P \& \sim Q))$.
13. $((P \& \sim Q) \supset \sim (P \supset Q))$.
14. $(\sim (P \& Q) \supset (\sim P \vee \sim Q))$.
15. $((\sim P \vee \sim Q) \supset \sim (P \& Q))$.
16. $(\sim (P \vee Q) \supset (\sim P \& \sim Q))$.
17. $((\sim P \& \sim Q) \supset \sim (P \vee Q))$.
18. $(\sim \neg P \supset P)$.
19. $(P \supset \sim \neg P)$.
20. $(\sim \sim P \supset P)$.
21. $(P \supset \sim \sim P)$.

(Здесь P , Q и R — произвольные логические формулы).

Логическое исчисление, определенное формулами вида 1—21 как аксиомами и обычной схемой вывода (т. е. возможностью перехода от формул P и $(P \supset Q)$ к формуле Q), называется конструктивным исчислением высказываний с сильным отрицанием. Это исчисление будет далее обозначаться через Π^+ .

Заметим, что логическое исчисление с формулами вида 1—10 в качестве аксиом (где P , Q и R не содержат знака \sim) и схемой вывода является, очевидно, обычным конструктивным исчислением высказываний («исчислением задач» ⁽³⁾), которое в дальнейшем будет называться исчислением Π .

Выводом в исчислении Π^+ называется, как обычно, такая конечная последовательность формул P_1, P_2, \dots, P_k , что всякий ее член P_i либо является одной из аксиом 1—21, либо же может быть получен по схеме вывода

$$\frac{P_{i_1} \quad P_{i_2}}{P_i},$$

где $i_1, i_2 < i$, а P_i имеет вид $(P_{i_1} \supset P_{i_2})$.

Формула называется выводимой в исчислении Π^+ , если она является последней формулой некоторого вывода.

В настоящей заметке рассматриваются некоторые свойства исчисления Π^+ .

Теорема 1. *Формула P , не содержащая знака сильного отрицания, выводима в исчислении Π^+ тогда и только тогда, когда она выводима в исчислении Π .*

Формулы P и Q называются эквивалентными, если выводима формула $((P \supset Q) \& (Q \supset P))$. Эта формула сокращенно будет обозначаться через $(P \equiv Q)$. Заметим, что формулы $(P \equiv Q)$ и $(\sim P \equiv \sim Q)$, вообще говоря, эквивалентными не являются. Формулы P и Q называются сильно эквивалентными, если выводима формула $((P \equiv Q) \& (\sim P \equiv \sim Q))$ (эта формула обозначается сокращенно через $(P \dot{\equiv} Q)$). Эквивалентные (а тем более сильно эквивалентные) формулы, очевидно, выводимы или нет одновременно.

Теорема 2. (О сильно эквивалентной замене). *Если P, Q и R — формулы, а S есть результат подстановки формулы Q вместо некоторого вхождения P в R , то в Π^+ выводима формула*

$$((P \dot{\equiv} Q) \supset (R \dot{\equiv} S)). \quad (1)$$

Определим понятия открытых и закрытых вхождений формулы в формулу (определение индуктивное). Несобственное вхождение всякой формулы в себя открыто. Вхождения формул в формулы вида $(P \supset Q)$, $(P \& Q)$, $(P \vee Q)$ и $\neg P$, происходящие от открытых вхождений этих формул в P и Q , открыты, а происходящие от закрытых вхождений — закрыты. Все собственные вхождения формул в формулу вида $\sim P$ закрыты. Очевидно, всякое вхождение формулы в формулу либо открыто, либо закрыто.

Теорема 3. (Об эквивалентной замене). *Если P, Q и R — формулы, а S есть результат подстановки формулы Q вместо некоторого открытого вхождения P в R , то в Π^+ выводима формула*

$$((P \equiv Q) \supset (R \equiv S)). \quad (2)$$

Последние две теоремы, а также выводимость формулы

$$(\neg P \dot{\equiv} (P \supset \sim P)) \quad (3)$$

позволяют сводить вопрос о выводимости произвольных формул Π^+ к вопросу о выводимости в этом исчислении формул некоторого специального вида.

Общезначимость формулы (3), общезначимость формулы (1) в условиях теоремы 2 и общезначимость формулы (2) в условиях, близких условиям теоремы 3, были доказаны А. А. Марковым (1).

Полуприведенной формулой назовем формулу, в которой всякое вхождение знака \sim стоит перед формульной переменной. В частности, все формулы исчисления Π являются полуприведенными. Приведенной формулой назовем полуприведенную формулу, не содержащую знака \neg .

Введенные классы формул представляют с точностью до эквивалентности все формулы исчисления Π^+ .

Теорема 4. По каждой формуле исчисления Π^+ можно построить эквивалентную ей приведенную формулу.

Назовем вполне приведенной формулой приведенную формулу, не содержащую знака $\&$ и подформул вида $((P \vee Q) \supset R)$. Конъюнкции вполне приведенных формул играют в исчислении Π^+ роль, аналогичную роли нормальных конъюнктивных форм классического исчисления высказываний.

Теорема 5. По каждой формуле исчисления Π^+ можно построить эквивалентную ей конъюнкцию вполне приведенных формул.

В заключение построим логическое исчисление, эквивалентное Π^+ , объектами которого являются слова, отличные от формул. (О понятии слова, т. е. линейной последовательности элементарных знаков, и связанной с этим понятием терминологии см. (4)).

Будем называть заключением всякое слово вида

$$P_1, P_2, \dots, P_k \vdash Q, \quad (4)$$

где P_1, P_2, \dots, P_k ($k \geq 0$) — некоторые полуприведенные попарно различные формулы, Q — полуприведенная формула или пустое слово \vdash — знак заключения.

Формулы P_1, P_2, \dots, P_k называются посылками заключения (4), а слово Q — его следствием. Посылки и следствие некоторого заключения называются его членами. Заключения, отличающиеся только порядком посылок, будем считать равными.

Заключение, членами которого являются приведенные (вполне приведенные) формулы, а следствие непусто, называется приведенным (соответственно, вполне приведенным) заключением. Для краткости мы будем иногда в дальнейшем обозначать слово вида $P_1 \dots P_k$, где P_1, \dots, P_k ($k \geq 0$) — попарно различные полуприведенные формулы, буквой π (может быть, с индексом при ней). Формулы P_1, \dots, P_k назовем в этом случае членами π . Будем через πP^* обозначать слово πP , если P отлично от каждого из членов π , и слово π в противном случае. Если $\pi_1 = Q_1 \dots Q_l$, то $\pi \pi_1^*$ означает то же самое, что $\pi Q_1^* \dots Q_l^*$.

Фигура вида

$$\frac{\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_k}{\mathcal{B}}, \quad (5)$$

где $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ и \mathcal{B} — некоторые заключения, называется схемой преобразования заключений.

Рассмотрим следующие фигуры (здесь всюду π_1 означает $P_1 \dots P_p$, а $\pi_2 = Q_1 \dots Q_q$):

$$\begin{array}{l} \frac{\pi_1 \vdash S}{\pi_1 R_1^* \vdash S} \text{ ПП}, \quad \frac{\pi_1 \vdash}{\pi_1 \vdash R_1} \text{ ПС}, \\ \frac{\pi_1 \vdash R_1 \quad R_2 \pi_2 \vdash S}{(R_1 \supset R_2) \pi_1^* \pi_2^* \vdash S} \text{ ИП}, \quad \frac{\pi_1 R_1 \vdash R_2}{\pi_1 \vdash (R_1 \supset R_2)} \text{ ИС}, \\ \frac{R_1 \pi_1 \vdash S}{(R_1 \& R_2) \pi_1^* \vdash S} \text{ КП}, \quad \frac{R_2 \pi_1 \vdash S}{(R_1 \& R_2) \pi_1^* \vdash S} \text{ КП}, \quad \frac{\pi_1 \vdash R_1 \quad \pi_1 \vdash R_2}{\pi_1 \vdash (R_1 \& R_2)} \text{ КС}, \quad (6) \\ \frac{R_1 \pi_1 \vdash S \quad R_2 \pi_2 \vdash S}{(R_1 \vee R_2) \pi_1^* \pi_2^* \vdash S} \text{ ДП}, \quad \frac{\pi_1 \vdash R_1}{\pi_1 \vdash (R_1 \vee R_2)} \text{ ДС}, \quad \frac{\pi_1 \vdash R_2}{\pi_1 \vdash (R_1 \vee R_2)} \text{ ДС}, \end{array}$$

$$\frac{\pi_1 \vdash R_1}{\neg R_1 \pi_1^* \vdash} \text{ОП}, \quad \frac{R_1 \pi_1 \vdash}{\pi_1 \vdash \neg R_1} \text{ОС}, \quad (6)$$

$$\frac{\pi_1 \vdash A}{\sim A \pi_1^* \vdash S} \text{СО} \quad (\text{слово } S \text{ не пусто})$$

(здесь сокращение ПП читается «присоединение посылки», ПС—«присоединение следствия»; ИП—«импликация в посылке» и т. д.; СО—«сильное отрицание»).

Если в перечисленных фигурах замещать буквы $P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, R_2, S$ какими-нибудь полуприведенными формулами, а букву A —некоторой формульной переменной, мы, очевидно, будем получать схемы преобразования заключений. Так полученные схемы мы будем называть наименованием той фигуры (6), из которой эта схема была получена. Все получаемые таким образом схемы назовем допустимыми.

Будем говорить, что задан вывод в заключениях, если указана конечная последовательность заключений

$$\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_i \quad (7)$$

каждый член \mathfrak{A}_i которой либо имеет вид $A \vdash A$ или $\sim A \vdash \sim A$ (A —формульная переменная; такие заключения будем называть исходными), либо ему сопоставлена некоторая допустимая схема

$$\frac{\mathfrak{A}_{i_1} \dots \mathfrak{A}_{i_r}}{\mathfrak{A}_i},$$

где $i_1, \dots, i_r < i$.

Заключение называется выводимым, если оно является последним заключением некоторого вывода в заключениях. Вывод (7) заключения \mathfrak{A} называется несократимым выводом этого заключения, если никакая его собственная подпоследовательность не является выводом \mathfrak{A} .

Теорема 6. *Несократимый вывод всякого приведенного (вполне приведенного) заключения состоит только из приведенных (вполне приведенных) заключений.*

Пусть формула P имеет вид $(P_1 \supset (P_2 \supset \dots \supset (P_p \supset S) \dots))$, причем формула S не является импликацией. Заключение $P_1 P_2^* \dots P_p^* \vdash S$ называется сопряженным формуле P . Построенное исчисление заключений эквивалентно исчислению Π^+ в следующем смысле.

Теорема 7. *Формула P выводима в исчислении Π^+ тогда и только тогда, когда выводимо сопряженное ей заключение.*

Таким образом, исчисление заключений эквивалентно исчислению Π^+ в таком же смысле, в каком построенные G. Gentzen'ом⁽⁵⁾ «исчисления секвенций» эквивалентны, соответственно, исчислению Π и классическому исчислению высказываний.

Поступило
9 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Марков, Усп. матем. наук, **5**, 3, 187 (1950). ² D. Nelson, J. Symb. Log., **14**, 1, 16 (1949). ³ А. Н. Колмогоров, Math. Zs., **35**, 58 (1932). ⁴ А. А. Марков, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. Стеклова, **38**, 176 (1951). ⁵ G. Gentzen, Math. Zs., **39**, 176, 405 (1934 / 1935).