Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПОЛИНОМАМИ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 12 V 1952)

1°. Пусть n-я строчка матрицы

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}\, x_2^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(n)}\, x_2^{(n)} \ldots x_n^{(n)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{1}$$

$$-1 < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} < 1 \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

составлена из корней полинома Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos x$. Через $\{l_k(x)\}_{k=1}^{n}$ мы обозначим фундаментальные полиномы Лагранжа, построенные для n-й строчки матрицы (1). Обозначим через $A_n[f; x]$ интерполяционный полином С. Н. Бернштейна степени $n-1$, построенный для n-й строчки матрицы (1) и функции $f(x)$, определенной в интервале $[-1, 1]$.

Как известно,

$$A_n[f; x] = {\sum_{j=1}^{n}}' f(x_j)\, r_j(x), \quad r_j(x) = l_j(x) + (-1)^{j-1} l_{2pt_j}(x), \tag{2}$$

где p — произвольное фиксированное натуральное число. Целое число t_j определяется однозначно из неравенств $2p(t_j - 1) < j < 2pt_j$. Штрих в сумме (2) указывает на то, что j принимает все целые значения от 1 до n, за исключением чисел, кратных $2p$. Если $2pt_j > n$, то мы считаем $l_{2pt_j}(x) \equiv 0$.

Полиномы $A_n[f; x]$ обладают двумя интересными свойствами:

1. Для любой непрерывной в $[-1, 1]$ функции $f(x)$ имеет место равномерно соотношение

$$A_n[f; x] \to f(x), \quad n \to \infty, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

2. Отношение степени полинома $A_n[f; x]$ к числу его узлов сколь угодно близко к 1, если только p достаточно велико.

2°. В настоящей работе изучается величина

$$\mathscr{E}^{(\alpha)} = \sup_{f \in Lip_K \alpha} |f(x) - A_n[f; x]|, \tag{3}$$

где $Lip_K \alpha$ есть класс всех функций, определенных в $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию Липшица данного порядка α с константой K.

Теорема. *При* $0<\alpha<1$ *имеет место неравенство*

$$\mathscr{E}^{(\alpha)}(x) \leqslant \frac{4\pi^\alpha K(4p)^{1+\alpha}\sqrt{2}}{n^\alpha} + \frac{4Kp\,|\,T_n(x)\,|}{n^\alpha}(\pi\rho c_\alpha + 2), \tag{4}$$

где

$$c_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2-\alpha}, \quad \rho = \max\{\sqrt{2}; (1+4\pi p)^{1-\alpha}\}. \tag{5}$$

При $\alpha = 1$ *имеет место неравенство*

$$\mathscr{E}^{(1)} \leqslant \frac{64\pi Kp^2\sqrt{2}}{n} + \frac{4\pi Kp\,|\,T_n(x)\,|\sqrt{2}}{n}\ln\frac{n}{2p} + \frac{8Kp\,|\,T_n(x)\,|}{n}. \tag{6}$$

Наметим ход доказательства. Так как $\sum\limits_{j=1}^{n}{}' r_j(x) = 1$, то

$$f(x) - A_n[f; x] = \sum_{j=1}^{n}{}' [f(x) - f(x_j)]\, r_j(x). \tag{7}$$

Предположим, что $0<\alpha\leqslant 1$. Из равенства (7) и $f\in Lip_K\alpha$ следует, что

$$\mathscr{E}^{(\alpha)} \leqslant \sum_{x_j\leqslant x} E_j' + \sum_{x_j>x}{}' E_j \equiv S_1^{(\alpha)} + S_2^{(\alpha)}, \; E_j = E_j(x) = K\,|\,x-x_j\,|^\alpha\,|\,r_j(x)\,|. \tag{8}$$

Мы будем рассматривать $S_2^{(\alpha)}$, ибо рассуждения для $S_1^{(\alpha)}$ аналогичны. Допустим, что

$$x_s < x < x_{s+1}, \quad 2pq \leqslant s+1 < 2p(q+1), \quad n = 2pm + r, \tag{9}$$

где $0\leqslant r<2p$.

Очевидно, что

$$S_2^{(\alpha)} = \sum_{j=s+1}^{2p(q+2)-1}{}' E_j + \sum_{j=2p(q+2)+1}^{2pm}{}' E_j + \sum_{j=2pm+1}^{n} E_j \equiv \sigma_1^{(\alpha)} + \sigma_2^{(\alpha)} + \sigma_3^{(\alpha)}. \tag{10}$$

Для оценки суммы $\sigma_1^{(\alpha)}$ заметим, что (²) $|\,r_j(x)\,| \leqslant 2\sqrt{2}$, $x\in[-1, 1]$. Кроме того, при $s+1\leqslant j\leqslant 2p(q+2)-1$ $\cos\theta_j - \cos\theta < \cos\theta_j - \cos\theta_s \leqslant \frac{4p}{n}\pi$. Поэтому

$$\sigma_1^{(\alpha)} \leqslant \frac{2K\sqrt{2}(4p)^{1+\alpha}\pi^\alpha}{n^\alpha}. \tag{11}$$

Переходим к оценке $\sigma_2^{(\alpha)}$. После простых вычислений получим, что

$$\sigma_2^{(\alpha)} = \frac{|\,T_n(x)\,|\,K}{n} \sum_{j=2p(q+2)+1}^{2pm} \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta-\theta_j}{2}\right|^{1-\alpha}} \frac{\left|\sin\frac{\theta_j-\theta_{2pt_j}}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\theta-\theta_{2pt_j}}{2}\right|}\psi_j\theta, \tag{12}$$

где $x=\cos\theta$, $x_j = \cos\theta_j = \cos\frac{2n-2j-1}{2n}\pi$, $j=1, 2, \ldots, n$;

$$\psi_j(\theta) = \frac{\left|\cos\frac{\theta_j-\theta_{2pt_j}}{2} - \cos\theta\cos\frac{\theta_j+\theta_{2pt_j}}{2}\right|}{2^{1-\alpha}\left(\sin\frac{\theta+\theta_j}{2}\right)^{1-\alpha}\sin\frac{\theta_j+\theta_{2pt_j}}{2}}. \tag{13}$$

Заметим, что

$$|\sin {}^1/_2 (\theta - \theta_j)|^{\alpha-1} \leqslant |\sin {}^1/_2 (\theta_{s+1} - \theta_j)|^{\alpha-1}, \quad s+1 < j \leqslant n. \tag{14}$$

Так как $\left|\sin \frac{\theta_{s+1} - \theta_j}{2}\right| \geqslant \frac{j-(s+1)}{n}$, $j > s+1$, то из (14) следует, что

$$\left|\sin \frac{\theta - \theta_j}{2}\right|^{\alpha-1} \leqslant n^{1-\alpha} (j-s-1)^{\alpha-1}, \quad j > s+1. \tag{15}$$

Так как $x < x_j < x_{2pt_j}$, то $\theta > \theta_j > \theta_{2pt_j}$. Значит,

$$\sin {}^1/_2 (\theta - \theta_{2pt_j}) \geqslant \sin {}^1/_2 (\theta_{s+1} - \theta_{2pt_j}).$$

Поэтому

$$\frac{\sin {}^1/_2 (\theta_j - \theta_{2pt_j})}{\sin {}^1/_2 (\theta - \theta_{2pt_j})} \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{2pt_j - j}{2pt_j - s - 1} \leqslant \frac{p\pi}{2pt_j - s - 1}, \tag{16}$$

ибо $2pt_j - j < 2p$.

Для оценки $\psi_j(\theta)$ мы сперва предположим, что $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. В этом случае $\cos {}^1/_2 (\theta_j + \theta_{2pt_j}) > \cos \theta_j$. Поэтому из (13) следует, что

$$\psi_j(\theta) \leqslant 2^{\alpha-1} \frac{\sin^2 \theta}{[\sin {}^1/_2 (\theta + \theta_j)]^{1-\alpha} \sin {}^1/_2 (\theta + \theta_{2pt_j})}. \tag{17}$$

Из (17) можно получить, что

$$\psi_j(\theta) \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

Если $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, то можно доказать, что (при $p \geqslant 12p$) справедливо неравенство

$$\psi_j(\theta) \leqslant 2\rho, \tag{19}$$

где ρ определяется из (5).

Итак, для всех значений $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ имеет место неравенство (19), Из (12), (15), (16) и (19) следует, что

$$\sigma_2^{(\alpha)} \leqslant \frac{K|T_n(x)|}{n} \sum_{i=q+3}^{m} \sum_{j=2p(i-1)+1}^{2pi-1} \frac{2p\pi n^{1-\alpha} \rho}{(j-s-1)^{1-\alpha} (2pi-s-1)}. \tag{20}$$

До сих пор мы считали, что $0 < \alpha \leqslant 1$. Теперь для оценки $\sigma_2^{(\alpha)}$ мы будем различать случаи $0 < \alpha < 1$ и $\alpha = 1$.

Если $0 < \alpha < 1$, то из (20) следует, что

$$\sigma_2^{(\alpha)} \leqslant \frac{2\pi\rho\, pKc_\alpha |T_n(x)|}{n^\alpha}, \quad c_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2-\alpha}}. \tag{21}$$

Если $\alpha = 1$, то (20) принимает вид

$$\sigma_2^{(1)} \leqslant \frac{K|T_n(x)|}{n} \sum_{i=q+3}^{m} \sum_{j=2p(i-1)+1}^{2pi-1} \frac{2p\pi\sqrt{2}}{2pi-s-1}. \tag{22}$$

Так как $s+1 < 2p(q+1)$, то из (22) следует, что

$$\sigma_2^{(1)} \leqslant \frac{2Kp\pi\sqrt{2}\,|T_n(x)|}{n} \sum_{i=q+3}^{m} \frac{1}{i-q-1}. \tag{23}$$

Из (23) следует, что

$$\sigma_2^{(1)} \leqslant \frac{2\pi K p \sqrt{2}\, |T_n(x)|}{n} \ln \frac{n}{2p}. \tag{24}$$

Остается получить оценку для $\sigma_3^{(\alpha)}$. Здесь мы опять будем считать, что $0 < \alpha \leqslant 1$. Заметим, что

$$\sigma_3^{(\alpha)} = \sum_{j=2pm+1}^{2pm+r} \frac{K\,|T_n(x)|}{n} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\theta_j - \cos\theta)^{1-\alpha}}. \tag{25}$$

Легко видеть, что

$$\frac{\sin\theta_j}{(\cos\theta_j - \cos\theta)^{1-\alpha}} \leqslant 2^\alpha n^{1-\alpha} (j-s-1)^{\alpha-1}. \tag{26}$$

Если $2pm < j < 2pm + 2p$, то $j - s - 1 > 2pm - 2p(q+1) > 2p$. Стало быть, из (26) следует, что

$$\frac{\sin\theta_j}{(\cos\theta_j - \cos\theta)^{1-\alpha}} \leqslant \frac{2^{2\alpha-1} n^{1-\alpha}}{p^{1-\alpha}}.$$

Поэтому из (25) следует, что

$$\sigma_3^{(\alpha)} \leqslant \frac{4Kp^\alpha\, |T_n(x)|}{n^\alpha}. \tag{27}$$

Из (8) и неравенств (11), (21) и (27) следует оценка (4). Из (8) и неравенств (11), (24) и (27) следует оценка (6).

3°. Оценки (6) и (4) являются точными относительно n.

Рассмотрим сперва оценку (6). Функция $f_1(x) = K|x| \in Lip_K$. После простых вычислений мы получим*, что при $p = 1$

$$|A_n(f_1, 0)| = \frac{K}{n} \sum_{k=1}^{m}{}' \left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2m-2k-1}{2n}\pi} + \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi} \right), \tag{28}$$

где $n = 2m$ и m — четное число. Штрих в сумме (28) указывает на то, что суммирование производится по всем нечетным числам, меньшим m. Из (28) следует, что

$$|A_n(K|x|, 0)| \geqslant \frac{8K}{\pi n} \left(1 + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1}\right) > \frac{c}{n} \ln n.$$

Интересно отметить, что улучшение структурных свойств функции не очень сильно повышает порядок величины $|f(x) - A_n(f, x)|$. Так например, при помощи простых вычислений можно убедиться, что для функции $f(x) = Kx \in Lip_K 1$

$$|A_n(f, 0)| > \frac{K}{4n} \quad (n \geqslant 3).$$

Порядок оценки (4) также точный, что видно из легко проверяемого неравенства

$$|A_n(K|x|^\alpha, 0)| \geqslant \frac{4K}{n^\alpha} \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{2-\alpha}.$$

В заключение я выражаю глубокую благодарность И. П. Натансону за внимание к настоящей работе.

Поступило
7 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. сб-ва и Укр. ин-та матем. наук, сер. 4, **5**, 49 (1932). [2] Д. Л. Берман, ДАН, **60**, № 3 (1948).

* Впредь мы будем считать, что полиномы $A_n(f, x)$ построены при $p = 1$ и что $n = 2m = 4l$.