Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

МАТЕМАТИКА

М. А. НАЙМАРК

О СПЕКТРЕ СИНГУЛЯРНЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 29 IV 1952)

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) = -y'' + p(x)y, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{1}$$

где $p(x)$ — комплексная функция, суммируемая в каждом конечном интервале $[0, a]$, $a > 0$.

При помощи этого дифференциального выражения можно следующим образом построить в гильбертовом пространстве $L_2(0, \infty)$ линейный оператор.

Обозначим через $\mathfrak{D}$ совокупность всех функций $y \in L^2(0, \infty)$, удовлетворяющих условиям:

1°. y и y' абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0, a]$, $a > 0$.

2°. $l(y) \in L^2(0, \infty)$.

Пусть θ — фиксированное комплексное число. Обозначим через $\mathfrak{D}_\theta$ совокупность всех функций $y \in \mathfrak{D}$, удовлетворяющих условию

$$y'(0) - \theta y(0) = 0. \tag{2}$$

Обозначим далее через L_θ оператор с областью определения $\mathfrak{D}_\theta$ такой, что для $y \in \mathfrak{D}_\theta$

$$L_\theta y = l(y);$$

оператор L_θ и есть оператор, построенный при помощи дифференциального выражения $l(y)$ и краевого условия (2).

Отсюда видно, что одно и то же дифференциальное выражение порождает различные дифференциальные операторы L_θ в зависимости от выбора комплексного числа θ в краевом условии (2).

Для случая, когда функция $p(x)$ и число θ вещественны, оператор L_θ был впервые изучен в работе Вейля ([1]) и с тех пор был предметом исследования многих авторов (см., например, ([2])), главным образом в связи с приложениями в квантовой механике. В частности, был изучен спектр оператора L_θ при тех или иных предположениях относительно функции $p(x)$. В случае комплексной функции $p(x)$ или комплексного θ до сих пор отсутствуют какие-либо результаты относительно L_θ. Тем не менее, оператор L_θ может представить интерес и для комплексной функции $p(x)$, ибо может служить для описания того случая, когда рассматриваемая система не является консервативной.

Предметом этой заметки является изложение некоторых результатов о спектре оператора L_θ в случае комплексных $p(x)$ и θ при различных предположениях относительно $p(x)$.

Методы, примененные при выводе этих результатов, дают возможность получить разложение заданной функции по собственным функциям оператора L_θ. Эти результаты допускают также обобщение на дифференциальные операторы высших порядков.

§ 1. Случай суммируемой функции. Предположим, что $p(x) \in L(0, \infty)$. Положим $\lambda = s^2$. Можно показать, что уравнение $l(y) = \lambda y$ имеет линейно независимые решения y_1, y_2, голоморфные относительно s в полуплоскости $\operatorname{Im} s > 0$ и удовлетворяющие следующим условиям:
при $x \to +\infty$

$$y_1 = e^{isx}[1 + o(1)], \quad y_1' = ise^{isx}[1 + o(1)], \tag{3а}$$

$$y_2 = e^{-isx}[1 + o(1)], \quad y_2' = -ise^{-isx}[1 + o(1)], \tag{3б}$$

при $s \to \infty$, $\operatorname{Im} s \geqslant 0$

$$y_1 = e^{isx}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right], \quad y_1' = ise^{isx}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right], \tag{4а}$$

$$y_2 = e^{-isx}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right], \quad y_2' = -ise^{-isx}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right]. \tag{4б}$$

Оценки (4а) и (4б) равномерны относительно x, $0 \leqslant x < \infty$, при $\operatorname{Im} s \geqslant \sigma > 0$. Из оценок (3а), (3б) вытекает, что при $\operatorname{Im} s > 0$ $y_1 \in L^2(0, \infty)$, а $y_2 \overline{\in} L^2(0, \infty)$; при $\operatorname{Im} s = 0$, $s > 0$ никакая ненулевая линейная комбинация $c_1 y_1 + c_2 y_2$ не принадлежит $L^2(0, \infty)$. Поэтому оператор L_θ не имеет положительных собственных значений. Его собственной функцией при $\operatorname{Im} s > 0$ может быть только cy_1; так как должно быть $y_1 \in \mathfrak{D}_\theta$, то соответствующие собственные значения λ определяются из уравнения

$$y_1'(0, \lambda) - \theta y_1(0, \lambda) = 0. \tag{5}$$

Вычисляя далее резольвенту оператора L_θ и пользуясь оценками (3), (4), приходим к следующему результату:

Теорема 1. *Спектр оператора L_θ непрерывен на положительной полуоси и дискретен во всей остальной комплексной λ-плоскости. Собственные значения оператора L_θ образуют ограниченное множество, предельные точки которого могут находиться только на конечном интервале положительной полуоси $\lambda \geqslant 0$. Для значений λ, не принадлежащих спектру, резольвента $(L_\theta - \lambda 1)^{-1}$ оператора L_θ есть интегральный оператор с ядром $K(x, y, \lambda)$, удовлетворяющим условиям:*

$$\int_0^\infty |K(x, y, \lambda)|^2 dy < \infty, \quad \int_0^\infty |K(x, y, \lambda)|^2 dx < \infty. \tag{6}$$

§ 2. Случай $p(x) \to \infty$. Пусть $p(x) \to \infty$ при $x \to +\infty$ и пусть, кроме того, выполнены следующие условия:

а) $|p|' = O(|p|^\alpha)$ при $x \to +\infty$, где $0 < \alpha < 3/2$;

б) $|p'| = O(|p|')$, $|p''| = O(|p|'')$ при $x \to +\infty$.

Тогда уравнение $l(y) = \lambda y$ имеет два линейно независимых решения y_1, y_2 таких, что при $x \to +\infty$

$$y_1 = \rho^{-1/2} e^{\xi} [1 + o(1)], \quad y_1' = \rho^{1/2} e^{\xi} [1 + o(1)], \tag{7a}$$

$$y_2 = \rho^{-1/2} e^{-\xi} [1 + o(1)], \quad y_2' = -\rho^{1/2} e^{-\xi} [1 + o(1)], \tag{7б}$$

где $\rho = \sqrt{p - \lambda}$, $\xi = \int\limits_{x_0}^{x} \rho\, dx$. При x достаточно большом будет $|p| > |\lambda|$ и $\arg \sqrt{p - \lambda}$ будет определяться по непрерывности однозначно выбором его значения при фиксированном значении x.

Пользуясь этими асимптотическими формулами, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть* $p(x) \to \infty$ *при* $x \to +\infty$ *и пусть выполнены условия* а) *и* б), *Пусть, кроме того, при* x *достаточно большом* $0 \leqslant \arg p \leqslant \gamma$, *где* $\gamma < \pi$.

Тогда спектр оператора L_θ *дискретен и не имеет конечных предельных точек. Для значений* λ, *не принадлежащих спектру, его резольвента* $(L_\theta - \lambda 1)^{-1}$ *есть интегральный оператор с ядром* $K(x, y, \lambda)$, *удовлетворяющим условиям* (6).

Предположим теперь, что кроме условий а) и б) выполняются еще условия:

в) $\operatorname{Re}(p^{1/2}) = o(p^{-1/2})$ при $x \to +\infty$;

г) $\int\limits^{\infty} |p|^{-1/2} dx < \infty$.

Тогда из формул (7) вытекает, что $y_1 \in L^2(0, \infty)$ и $y_2 \in L^2(0, \infty)$.

Вместо оператора L_θ следует рассмотреть другой оператор $\hat{L}$, определенный следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{D}^*$ совокупность функций, аналогичную $\mathfrak{D}$, но построенную для сопряженного дифференциального выражения $l^*(y) = -y'' + \overline{p(x)}\, y$. Если $y \in \mathfrak{D}$, $z \in \mathfrak{D}^*$, то из формулы Лагранжа $\int\limits_{\alpha}^{\beta} l(y)\, \overline{z}\, dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} y \overline{l^*(z)}\, dx = [y, z]_{\alpha}^{\beta}$, где $[y, z] = y(x)\overline{z'(x)} - y'(x)\overline{z(x)}$ вытекает, что существует $[y, z]_0^{\infty}$. Выберем две функции $z_1, z_2 \in \mathfrak{D}^*$ такие, что определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} [y_1, z_1]_0^{\infty} & [y_1, z_2]_0^{\infty} \\ [y_2, z_1]_0^{\infty} & [y_2, z_2]_0^{\infty} \end{vmatrix}$$

не обращается тождественно в нуль. Обозначим через $\hat{\mathfrak{D}}$ совокупность всех функций $y \in \mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям $[y, z_1] = 0$, $[y, z_2] = 0$, а через $\hat{L}$ — оператор с областью определения $\hat{\mathfrak{D}}$ такой, что $Ly = l(y)$ для $y \in \check{\mathfrak{D}}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* а), б), в), г).

Тогда спектр оператора $\hat{L}$ *дискретен и не имеет конечных предельных точек. Для значений* λ, *не принадлежащих спектру, резольвента* $R_\lambda = (\hat{L} - \lambda 1)^{-1}$ *есть интегральный оператор с ядром Гильберта — Шмидта.*

Заменим теперь условие г) условием $\int\limits^{\infty} |p|^{-1/2} dx = \infty$. Мы придем к следующей теореме:

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* а), б), в) *и пусть* $\int\limits^{\infty} |p|^{-1/2} dx = \infty$.

Тогда непрерывная часть спектра оператора L_θ заполняет всю действительную ось, а для всех других значений λ спектр может быть только дискретным. Для всех значений λ, не принадлежащих спектру, резольвента $R_\lambda = (L_\theta - \lambda 1)^{-1}$ есть интегральный оператор с ядром, удовлетворяющим условиям (6).

Если выполнено одно из условий:

А. $\mathrm{Im}\, p(x) \geqslant 0$ для $0 \leqslant x < \infty$; $\mathrm{Im}\, \theta \geqslant 0$;

Б. $\mathrm{Im}\, p(x) \leqslant 0$ для $0 \leqslant x < \infty$; $\mathrm{Im}\, \theta \leqslant 0$,

то предыдущие результаты можно усилить:

Если выполнено условие А, *то во всех рассмотренных случаях* (*теоремы* 1, 2, 4) *точки дискретного спектра оператора L_0 могут находиться только в верхней полуплоскости; они могут лежать на действительной оси лишь тогда, когда* $\mathrm{Im}\, p(x) \equiv 0$, $\mathrm{Im}\, \theta = 0$, *т. е. когда оператор L_θ самосопряженный.*

Если же выполнено условие Б, *то в теоремах* 1 *и* 4 *точки дискретного спектра оператора L_θ могут находиться только в нижней полуплоскости* $\mathrm{Im}\, s > 0$ *при* $(\mathrm{Im}\, p)^2 + (\mathrm{Im}\, \theta)^2 > 0$ *и могут лежать на действительной оси в случае теоремы* 4.

В случае же теоремы 1 *собственные значения не могут находиться на действительной оси; их единственной предельной точкой может быть только* $\lambda = 0$.

Поступило
23 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Math. Ann., **68**, 220 (1910). [2] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, 1950.