Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

МАТЕМАТИКА

А. Е. ЛИБЕР

К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЦЕНТРАЛЬНО-АФФИННОМ (ВЕКТОРНОМ) ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 IV 1952)

1. Векторное n-мерное пространство B_n можно рассматривать как геометрическое n-пространство с фундаментальной группой $GL(n)$, являющейся группой автоморфизмов пространства B_n; это геометрическое пространство изоморфно центрально-аффинному n-пространству E_n. Понятия m-поверхности, m-плоскости и т. д. переносятся на векторное n-пространство; в частности, m-плоскости, проходящей через центр E_n, соответствует m-мерное подпространство B_m пространства B_n. Изучение геометрических образов в B_n удобно в том отношении, что полученные результаты истолковываются одновременно как для точечных, так и для гиперплоскостных образов в центрально-аффинном n-пространстве.

Поверхность S m измерений (m-поверхность) в B_n определяется с помощью отображения $\mathbf{l}(\eta^a)$ $(a, b, c, d, e = 1, \ldots, m)$ области арифметического m-пространства в векторное пространство B_n, причем предполагается, что относительно некоторого постоянного базиса в B_n компоненты $\mathbf{l}(\eta^a)$ являются функциями от η^a класса C_N и векторы $\mathbf{l}_a = \partial_a \mathbf{l}$ $(\partial_a = \partial / \partial \eta^a)$ линейно независимы при каждом выборе η^a. Допуская регулярные преобразования $\eta^{a'} = f^{a'}(\eta^b)$, мы ассоциируем с m-поверхностью S геометрическое m-пространство X_m. Подпространство B_m, натянутое на векторы $\mathbf{l}_a$, назовем касательным подпространством m-поверхности S в точке η^a; касательное B_m изоморфно локальному касательному $E_m(\eta^a)$ ассоциированного пространства X_m, поэтому m-поверхности S сопоставляется касательное составное многообразие $E_m(X_m)$ ([3]).

Будем говорить, что задано д о о с н а щ е н и е m-поверхности S, если с каждой точкой η^a сопоставляется разложение B_n в прямую сумму: $B_n = B_m + B_1 + B_{n-m-1}$, где B_m — касательное подпространство, B_1 — радиальное подпространство, натянутое на вектор $\mathbf{l}$, и B_{n-m-1} — д о о с н а щ а ю щ е е подпространство. Дооснащение существует только для поверхностей, не являющихся «центрально-коническими», т. е. для которых радиальное B_1 не принадлежит касательному B_m. Так как все дооснащающие подпространства B_{n-m-1} изоморфны некоторому центрально-аффинному E_{n-m-1}, то с каждой точкой ассоциированного X_m сопоставляется некоторое E_{n-m-1}, что приводит к д о о с н а щ а ю щ е м у составному многообразию $E_{n-m-1}(X_m)$, ассоциированному с m-поверхностью S. Точно так же будем говорить, что задано оснащение m-поверхности S, если с каждой точкой η^a сопоставлено разложение B_n в прямую сумму: $B_n = B_m + B_{n-m}$, где B_m — касательное подпространство и B_{n-m} — оснащающее подпространство; аналогично предыдущему определяем о с н а щ а ю щ е е составное многообразие

$B_{n-m}(X_m)$, ассоциированное с m-поверхностью S. Очевидно, что дооснащение является специальным случаем оснащения. В дальнейшем мы предположим, что $1 < m < n - 1$, ибо случаи $m = n - 1$ и $m = 1$ подробно исследованы ([2]).

2. Пусть $\mathbf{n}_p$ $(p, q = 1, \ldots, n - m - 1;\ p_1, q_1 = 1, \ldots, n - m)$ — базис дооснащающего B_{n-m-1}, тогда $\mathbf{l}$, $\mathbf{l}_a$, $\mathbf{n}_p$ образуют базис пространства B_n, коэффициенты Γ_{ab}^{c} при $\mathbf{l}_a$ в разложении векторов $\partial_a \mathbf{l}_b$ по указанному базису образуют объект аффинной связности в касательном составном многообразии $E_m(X_m)$, аналогично коэффициенты Γ_{ap}^{q} при $\mathbf{n}_q$ в разложении векторов $\partial_a \mathbf{n}_p$ по указанному базису образуют объект аффинной связности в дооснащающем составном многообразии $E_{n-m-1}(X_m)$ ([3]); используя эти объекты для операции ковариантного дифференцирования в соответствующих составных многообразиях, получаем деривационные формулы для дооснащенной поверхности в следующем виде:

$$D_a \mathbf{l}_b = h_{ab\cdot}^{\ \ p} \mathbf{n}_p + g_{ab} \mathbf{l}, \quad D_a \mathbf{n}_p = h_{ap\cdot}^{\ \ b} \mathbf{l}_b + w_{ap} \mathbf{l}, \quad (h_{[ab]\cdot}^{\ \ \ p} = 0, \quad g_{[ab]} = 0). \qquad (1)$$

Применяя ковариантное дифференцирование связующих объектов, получим условия интегрируемости системы (1):

$$\begin{gathered} R_{abc\cdot}^{\ \ \ d} = 2h_{[a|c|}^{\ \ \ p} h_{b]p\cdot}^{\ \ \ d} - 2\delta_{[a}^{d} g_{b]c}, \quad D_{[a} h_{b]c}^{\ \ \ p} = 0, \quad D_{[a} g_{b]c} = - h_{c[a}^{\ \ \ p} w_{b]p}, \\ R_{abp\cdot}^{\ \ \ q} = 2h_{[a|p|}^{\ \ \ c} h_{b]c\cdot}^{\ \ \ q}, \quad D_{[a} h_{b]p}^{\ \ \ c} = \delta_{[a}^{c} w_{b]p}, \quad D_{[a} w_{b]p} = h_{[a|p|}^{\ \ \ \ e} g_{b]e}, \end{gathered} \qquad (2)$$

где $R_{abc\cdot}^{\ \ \ d}$ и $R_{abp\cdot}^{\ \ \ q}$ — аффиноры кривизны указанных объектов аффинной связности. Отсюда следует: *объекты* Γ_{ab}^{c}, Γ_{ap}^{q} *и связующие аффиноры* $h_{ab\cdot}^{\ \ p}$, $h_{ap}^{\ \ b}$, g_{ab}, w_{ap}, *удовлетворяющие условиям* (2), *определяют с точностью до автоморфизмов векторного пространства дооснащенную m-поверхность в векторном n-пространстве B_n.* Поэтому перечисленные объекты образуют фундаментальную систему объектов дооснащенной m-поверхности в B_n.

Точно так же деривационные формулы, условия интегрируемости и основная теорема могут быть получены для оснащенной m-поверхности. Формально деривационные формулы оснащенной m-поверхности могут быть получены из уравнений (1), если положить $g_{ab} = 0$, $w_{ap} = 0$, заменить индексы p, q на p_1, q_1, соответственно, и добавить конечные соотношения: $\mathbf{l} = v^a \mathbf{l}_a + v^{p_1} \mathbf{n}_{p_1}$. Аналогичные изменения следует внести в уравнения (2) для получения из них условий интегрируемости оснащенной поверхности и добавить к ним соотношения:

$$D_a v^b + h_{ap_1}^{\ \ \ b} v^{p_1} = \delta_a^b, \quad D_a v^{p_1} + h_{ab}^{\ \ p_1} v^b = 0. \qquad (3)$$

Этим путем получаем: *объектами* Γ_{ab}^{c}, $\Gamma_{ap_1}^{q_1}$ *и связующими аффинорами* $h_{ab}^{\ \ p_1}$, $h_{ap_1}^{\ \ \ b}$, v^a, v^{p_1}, *удовлетворяющими указанным условиям, оснащенная m-поверхность в B_n определяется с точностью до автоморфизмов векторного пространства.*

m-поверхность S называется регулярной, если множество ее касательных плоскостей зависит от m параметров, в противном случае m-поверхность называется сингулярной. Можно показать, что m-поверхность будет сингулярной тогда и только тогда, когда существует в ассоциированном X_m векторное поле v^a такое, что $h_{ba}^{\ \ p} v^a = 0$, $g_{ab} v^a = 0$.

3. Для построения геометрии неоснащенной m-поверхности в B_n нужно указать теперь инвариантное, т. е. определяемое самой m-поверхностью, дооснащение или оснащение. Пусть B_{n-m-1} — некоторое произвольно выбранное дооснащающее подпространство и ${}^*B_{n-m-1}$ —

некоторое другое дооснащающее подпространство и пусть $^*\mathfrak{n}_p$ — его базис, соответствующий базису $\mathfrak{n}_p$ в B_{n-m-1}; тогда

$$^*\mathfrak{n}_p = \mathfrak{n}_p + T^a_p \mathfrak{l}_a + S_p \mathfrak{l}. \tag{4}$$

Связующие аффиноры T^a_p, S_p однозначно определяют переход от одного дооснащения к другому. При преобразовании дооснащения преобразуются, вообще говоря, фундаментальные геометрические объекты дооснащенной m-поверхности. Легко показать, что всякому инвариантному дооснащению соответствуют на произвольно дооснащенной m-поверхности связующие аффиноры P^a_p, Q_p, преобразующиеся при преобразовании (4) по закону: $^*P^a_p = P^a_p + T^a_p$, $^*Q_p = Q_p + S_p$. Обратно, всякие два связующие аффинора P^a_p, Q_p, определенные на произвольно дооснащенной m-поверхности и при преобразовании (4) преобразующиеся по указанному выше закону, определяют инвариантное дооснащение, именно то, для которого $P^a_p = 0$, $Q_p = 0$.

Рассмотрим множество относительных инвариантов связующего аффинора $h_{ab\cdot}^{\ \ p}$ и предположим существование хотя бы одного отличного от нуля такого инварианта I веса k_1 относительно касательного E_m и веса k_2 относительно дооснащенного E_{n-m-1}, причем $k_1 k_2 \neq 0$. Введем тогда в рассмотрение связующие аффиноры:

$$h^{ab}_{\ \ p} = \frac{\partial \ln I}{\partial h_{ab\cdot}^{\ \ p}}, \qquad h^{abcd}_{\ \ \ \ pq} = -\frac{\partial h^{ab}_{\ \ p}}{\partial h_{cd\cdot}^{\ \ q}}. \tag{5}$$

Можно показать, что условия

$$\text{а) } P^a_p \equiv \frac{2}{k_1 - 2k_2}\left\{h^{bcda}_{\ \ \ \ qp} + \frac{1}{k_2 - k_1}\, h^{bc}_{\ \ q} h^{da}_{\ \ p}\right\} D_b h_{cd\cdot}^{\ \ q} = 0, \quad \text{б) } Q_p \equiv -h^{ab}_{\ \ p} g_{ab} = 0 \tag{6}$$

определяют инвариантное дооснащение m-поверхности в B_n.

Так как преобразование оснащения осуществляется по закону $^*\mathfrak{n}_{p_1} = \mathfrak{n}_{p_1} + T^a_{p_1}\mathfrak{l}_a$, то аналогичный путь пригоден и для инвариантного определения оснащения; формально оно определяется условиями (6, а), в которых p, q следует заменить на p_1, q_1. Эти результаты непосредственно применимы для поверхностей и семейств гиперплоскостей в центрально-аффинном n-пространстве, и для поверхностей в аффинном m-пространстве (ср. [4]). Указанный путь определения инвариантного дооснащения (или оснащения) с помощью условий (6) не пригоден для всех m-поверхностей при $m^2 + 3m < 2n - 2$ (или при $m^2 + 3m < 2n$). В таком случае для построения связующих аффиноров P^a_p, Q_p, определяющих инвариантное дооснащение (оснащение), следует использовать дифференциальные продолжения [1] фундаментальных объектов более высокого порядка. Заметим, что если связующий аффинор P^a_p построен, то можно положить $Q_p = \frac{1}{m}\left(h_{ap\cdot}^{\ \ a} - D_a P^a_p - h_{ab}^{\ \ q} P^a_q P^b_p\right)$.

4. Для некоторого класса m-поверхностей в B_n (при $2m < n$) инвариантное дооснащение может быть получено следующим путем. Рассмотрим в B_n m-линейную симметричную скалярную функцию от m векторных аргументов $\varphi(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m)$. Множество векторов $\mathfrak{x}$, для которых $\varphi(\mathfrak{x}, \ldots, \mathfrak{x}) = 1$, назовем тензорной гиперповерхностью m-го порядка в B_n. После выбора некоторого базиса в B_n уравнение тензорной гиперповерхности m-го порядка в координатах имеет вид: $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} x^{\alpha_1} \ldots x^{\alpha_m} = 1$; следовательно, она определяется заданием компонент $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots = 1, \ldots, n)$ тензора m-й валентности в B_n. Пусть $\mathfrak{l}(\eta^a)$ — некоторая m-поверхность S в B_n. Будем говорить, что

тензорная гиперповерхность m-го порядка имеет с m-поверхностью S в точке η_0^a соприкосновение не ниже $(n-1)$-го порядка, если

$$\varphi(\eta_0^a)=1, \quad [\partial a_1 \dots \partial a_s \varphi]_{\eta^a=\eta_0^a}=0$$

$$(\varphi(\eta^a) \equiv \varphi(\mathbf{l}(\eta^a), \dots, \mathbf{l}(\eta^a))), \quad s=1, \dots, n-1. \tag{7}$$

Система уравнений (7) является линейной системой из $\binom{n+m-1}{n-1}$ уравнений относительно $\binom{n+m-1}{n-1}$ коэффициентов $a_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$, именно (см. ([1]), стр. 179):

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} l^{\alpha_1} \dots l^{\alpha_m}=1,$$

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k!} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \sum_{(i_1+\dots+i_1=s)} \frac{1}{i_1! \dots i_k!} l^{\alpha_1}_{(a_1 \dots a_{i_1}} \dots l^{\alpha_k}_{a_{s-i_k+1} \dots a_s)}=0,$$

$$s=1, \dots, n-1, \tag{8}$$

где обозначено для краткости

$$\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}=0 \text{ при } m<k;$$

$$\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}=m(m-1) \dots (m-k+1) a_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_m} l^{\alpha_{k+1}} \dots l^{\alpha_m} \quad \text{при} \quad m \geqslant k.$$

Пусть H — детерминант системы (8). Если $H \neq 0$ (что возможно только при $2m<n$), то система (8) имеет единственное решение, однозначно определяющее соприкасающуюся тензорную гиперповерхность m-го порядка в точке η_0^a. Рассмотрим кусок m-поверхности S, вдоль которого $H \neq 0$, и пусть $a_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ — инвариантно определяемый системой (8) тензор. Используя этот тензор, строим в каждой точке рассматриваемого куска m-поверхности S квадратичную форму: $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x})=a_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-2}\beta\gamma} l^{\alpha_1} \dots l^{\alpha_{m-2}} x^\beta x^\gamma$, относительно которой определяем ортогональность (сопряженность) направлений, и строим подпространство, ортогональное к касательному подпространству B_m и радиальному подпространству B_1. Если так построенное ортогональное подпространство является дооснащающим, то рассматриваемый кусок m-поверхности назовем п р а в и л ь н ы м. Легко показать, что условие правильности заключается в невырожденности тензора $g_{ab}=(m-1)\psi(\mathbf{l}_a, \mathbf{l}_b)$.

Семейство гиперплоскостей $\psi(\mathbf{l}, \mathbf{x})=1$ определяет вдоль правильной m-поверхности регулярную гиперполосу ([5]), ибо нетрудно показать, что определенный выше тензор g_{ab} является тензором регулярности ([5]) указанной гиперполосы. Отсюда дальнейшее построение геометрии правильной m-поверхности в B_n может быть осуществлено по предложенному В. В. Вагнером ([5]) методу изучения регулярной гиперполосы в B_n.

Поступило
29 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Вагнер, Приложение к кн. Веблена и Уайтхеда «Основания дифференциальной геометрии», М., 1949. [2] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 7, 65 (1949); Н. Ф. Ржехина, ДАН, 72, № 3 (1950). [3] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 8, 11 (1950). [4] K. H. Weise, Math. Zs., 44, 161 (1938). [5] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 8, 197 (1950).