

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и Я. Б. РУТИЦКИЙ

**ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 IV 1952)

1. Пусть G — компактное множество в n -мерном евклидовом пространстве. Через \hat{G} обозначим топологическое произведение $G \times G$. Пусть, далее, $M_1(u)$ и $M_2(u)$ — две N' -функции ((¹), определения см. также (²)), дополнительные к которым будем обозначать через $N_1(u)$ и $N_2(u)$.

В настоящей заметке изучается линейный интегральный оператор

$$Au(x) = \int_{\hat{G}} K(x, y) u(y) dy, \quad (1)$$

где $K(x, y)$ — измеримая на \hat{G} функция, и выясняется, когда он будет непрерывным (вполне непрерывным) оператором, действующим из одного пространства Орлича $L_{M_1}(G)$ в другое пространство $L_{M_2}(G)$.

Оператор (1) исследовал Заанен (³), которому принадлежит следующая теорема:

Пусть N' -функции $N_1(u)$ и $N_2(u)$ удовлетворяют Δ_2 -условию. Пусть $K(x, y)$ как функция от y почти при всех x принадлежит $L_{N_1}^(G)$, причем $\|K(x, y)\|_{N_1} = W(x) \in L_{M_2}(G)$. Тогда оператор (1) является вполне непрерывным оператором, действующим из $L_{M_1}^*(G)$ в $L_{M_2}^*(G)$.*

Так как в условии этой теоремы N' -функции удовлетворяют Δ_2 -условию, то теорема применима к изучению операторов в узких классах пространств. Кроме этого отметим, что условия теоремы Заанена представляются нам трудно проверяемыми, так как вычисление норм функций в пространствах Орлича, отличных от L^p , практически мало возможно.

2. Теорема 1. Пусть $\Phi(u)$ — такая N' -функция, что при $u(y) \in L_{M_1}^*(G)$, $v(x) \in L_{N_2}^*(G)$ функция $u(y)v(x)$ принадлежит $L_{\Phi}^*(\hat{G})$, причем

$$\|uv\|_{\Phi} \leq C \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2}$$

Пусть ядро $K(x, y)$ принадлежит пространству $L_{\Psi}^*(\hat{G})$ (суммируемо с функцией $\Psi(u)$ после умножения на некоторую постоянную), где $\Psi(u)$ — функция, дополнительная к $\Phi(u)$.

Тогда оператор (1) действует из $L_{M_1}^*(G)$ в $L_{M_2}^*(G)$ и непрерывен. Теорема 1 в приложениях, конечно, неудобна. Приведем следствия из нее.

Теорема 2. Оператор (1) действует из $L_{M_1}^*(G)$ в $L_{M_2}^*(G)$ и непрерывен, если $K(x, y) \in L_{\Psi}^*(G)$, если $\Psi(u) = M_2[N_1(u)]$ или $\Psi(u) = N_1[M_2(u)]$.

Теорема 2 в случае, когда рассматривается оператор, действующий в L^2 , дает, как легко видеть, слишком ограничительные условия. Теорема 3 для пространств L^p дает более общие условия непрерывности, но, вообще говоря, не является более общим утверждением, чем теорема 2.

Говорят, что N' -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию (1), если существуют такие постоянные u_0 и Q , что при $u, v \geq u_0$

$$|M(uv)| \leq QM(u)M(v).$$

Мы будем ниже писать $M(u) > M_1(u)$, если $L_{M_1}^*(G) \supset L_M^*(G)$.

Теорема 3. Пусть $\Psi(u)$ — такая N' -функция, дополнительная к которой удовлетворяет Δ' -условию, причем $\Psi(u) > M_2(u)$ и $\Psi(u) > N_1(u)$. Пусть $K(x, y) \in L_{\Psi}^*(G)$.

Тогда оператор (1) действует из $L_{M_1}^*(G)$ в $L_{M_2}^*(G)$ и непрерывен.

Для применения теоремы 3 нужно знать, удовлетворяет ли дополнительная к $\Psi(u)$ N' -функция $\Phi(u)$ Δ' -условию. При этом в большинстве случаев функция $\Phi(u)$ в явном виде не может быть найдена и непосредственная проверка выполнимости Δ' -условия невозможна. Нам не удалось найти необходимые и достаточные условия того, что N' -функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, выраженные непосредственно в терминах N' -функции $\Psi(u)$. Приводимая ниже лемма дает легко проверяемый достаточный признак, который оказывается удобным при изучении важных классов пространств Орлича.

Лемма. Пусть производная $p(u)$ N' -функции $\Psi(u)$ дифференцируема при больших значениях u , причем функция

$$g(t) = \frac{t p'(t)}{p(t)}$$

при больших значениях t не убывает.

Тогда дополнительная к $\Psi(u)$ N' -функция удовлетворяет Δ' -условию.

Если в условиях леммы функция $g(t)$ не возрастает, то Δ' -условию удовлетворяет сама функция $\Psi(u)$.

Из леммы 1 следует, например, что Δ' -условию удовлетворяет N' -функция, дополнительная к N' -функции $\Psi(u) = e^{u^2} - 1$. Следовательно, для того, чтобы оператор (1) действовал из любого пространства L^p в пространство $L_{\Psi}^*(G)$, в силу теоремы 3 достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\iint_G e^{K^2(x, y)} dx dy < \infty.$$

3. Всюду в дальнейшем через $x_{\mathcal{G}}(x)$ будем обозначать характеристическую функцию множества $\mathcal{G} \subset G$. Будем говорить, что функция $u(x)$ имеет в пространстве $L_M^*(G)$ абсолютно непрерывную норму, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\|u(x) x_{\mathcal{G}}(x)\|_M < \varepsilon$, коль скоро $\text{mes } \mathcal{G} < \delta$ ($\mathcal{G} \subset G$).

В пространствах Орлича, порожденных функциями, не удовлетворяющими Δ_2 -условию, не каждая функция имеет абсолютно непрерывную норму.

Теорема 4. Действующий из $L_{M_1}^*(G)$ в $L_{M_2}^*(G)$ оператор (1) в условиях теоремы 1, теоремы 2 или теоремы 3 вполне непрерывен, если функция $K(x, y)$ имеет в $L_\Psi^*(G)$ абсолютно непрерывную норму.

В приложениях удобны более обозримые следствия из этой теоремы.

Обозначим через E_M замыкание в $L_M^*(G)$ линейного множества ограниченных функций. Нетрудно видеть, что функция $u(x) \in L_M^*(G)$ имеет абсолютно непрерывную норму в том и только в том случае, когда она принадлежит E_M . Очевидно, $E_M \subset L_M$. Если N' -функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, то множество ограниченных функций нигде не плотно ⁽²⁾ в $L_M^*(G)$ и, следовательно, $E_M \neq L_M^*(G)$. Если же $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то $E_M = L_M = L_M^*(G)$.

Поэтому из теоремы 4 вытекает

Теорема 5. Действующий из $L_{M_1}^*(G)$ в $L_{M_2}^*(G)$ оператор (1) в условиях теоремы 1, теоремы 2 или теоремы 3 вполне непрерывен, если N' -функция $\Psi(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Из этой теоремы следует, например, что оператор (1) действует из пространства $L_{M_1}^*(G)$ в пространство $L_{M_2}^*(G)$, где $M_1(u) = e^{|u|} - u - 1$, $M_2(u) = N_1(u) = (|u| + 1) \ln(|u| + 1) - |u|$, и вполне непрерывен, если

$$\iint_G |K(x, y)| \ln^2(|K(x, y)| + 1) dx dy < \infty.$$

Теорема 4 допускает эквивалентную формулировку.

Теорема 6. Действующий из $L_{M_1}^*(G)$ в $L_{M_2}^*(G)$ оператор (1) в условиях теоремы 1, теоремы 2 или теоремы 3 вполне непрерывен, если при любом $\alpha > 0$

$$\iint_G \Psi[\alpha K(x, y)] dx dy < \infty. \quad (2)$$

Условие (2), в частности, выполняется, если

$$\iint_G \Psi\{Q[K(x, y)]\} dx dy < \infty,$$

где $Q(u)$ — некоторая N' -функция.

В силу этого из теоремы 6 вытекает, например, что оператор (1) действует в пространстве $L_M^*(G)$, где $M(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, и вполне непрерывен, если

$$\iint_G e^{|K(x, y)|^{1+\varepsilon}} dx dy < \infty \quad (\varepsilon > 0).$$

4. В связи с теоремами о компактности операторов естественно возникает вопрос об отыскании достаточных общих признаков компактности семейств функций в пространствах Орлича. Отметим, впрочем, что теоремы предыдущего пункта проще всего доказывать, аппроксимируя изучаемый оператор интегральными операторами с непрерывными ядрами, компактность которых очевидна.

Общераспространенный признак А. Н. Колмогорова ⁽⁴⁾ компактности семейств функций в пространствах L^p основан на возможности приближений функций семейства ограниченными функциями. Так как множество ограниченных функций нигде не плотно в любом пространстве Орлича, порожденном N' -функцией, не удовлетворяющей Δ_2 -усло-

вию, то признак А. Н. Колмогорова принципиально не может быть полностью обобщен на произвольные пространства Орлича.

Для случая, когда N' -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, признак А. Н. Колмогорова на семейства функций в пространстве $L_M^*(G)$ был обобщен Такагаши⁽⁵⁾ (без предположения, что $\text{mes } G < \infty$). Для случая пространств Орлича, порожденных N' -функциями, не удовлетворяющими Δ_2 -условию, обычное доказательство А. Н. Колмогорова приводит к следующему утверждению.

Теорема 7. Семейство \mathfrak{M} функций пространства $L_M^*(G)$ компактно в этом пространстве и лежит в E_M тогда и только тогда, когда выполнены условия:

а) $\|u\|_M \leq C$ ($u(x) \in \mathfrak{M}$);

б) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех функций $u(x) \in \mathfrak{M}$ из условия $r < \delta$ следует

$$\|u_r - u\|_M < \varepsilon.$$

Через $u_r(x)$ здесь обозначена функция Стеклова

$$u_r(x) = \frac{1}{m_r} \int_{T_r(x)} u(t) dt \quad (x \in G),$$

где $T_r(x)$ — шар радиуса r с центром в точке $x \in G$, m_r — объем шара $T_r(x)$, причем $u(t) = 0$ при $t \notin G$.

Второй признак компактности семейства функций в пространствах Орлича (ср. (6), лемма 1) также относится фактически к семействам функций, лежащим в E_M .

Будем говорить, что семейство \mathfrak{M} функций $u(x) \in L_M^*(G)$ имеет равномерно абсолютно непрерывные нормы, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $\|u(x) \chi_{\mathcal{C}}(x)\|_M < \varepsilon$ для всех $u(x) \in \mathfrak{M}$, если $\text{mes } \mathcal{C} < \delta$ ($\mathcal{C} \subset G$).

Теорема 8. Пусть семейство $\mathfrak{M} \subset L_M^*(G)$ имеет в $L_M^*(G)$ равномерно абсолютно непрерывные нормы и компактно в каком-нибудь пространстве Орлича.

Тогда семейство \mathfrak{M} компактно в $L_M^*(G)$.

Поступило
9 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Z. W. Birnbaum и W. Orlicz, *Studia Math.*, 3, 1 (1931). ² М. А. Красносельский и Я. Б. Рутницкий, *ДАН*, 81, № 4 (1951). ³ A. Zaanen, *Ann. of Math.*, 47, No. 4 (1946). ⁴ А. Н. Колмогоров, *Göttinger Nachr.*, 60 (1931). ⁵ Т. Takahashi, *Stud. Math.*, 5, 141 (1934). ⁶ М. А. Красносельский, *ДАН*, 82, № 3 (1952).

Поправка. В моей статье «Операторы с монотонными минорантами» (*ДАН*, т. 76, № 4, 1951 г.) приводятся теоремы о существовании собственных функций у положительных операторов на границах некоторых областей банахова пространства. Во всех определениях и утверждениях предполагается, что эти области ограничены (эта оговорка пропущена по моей вине).

М. Красносельский