Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

МАТЕМАТИКА

М. М. ДЖРБАШЯН

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 17 IV 1952)

В настоящей заметке приводится ряд результатов о представлении и единственности целых функций конечного порядка и нормального типа, интегрируемых или ограниченных по определенным лучам, исходящим из начала координат.

1°. Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка $\rho > 0$ и типа σ $(0 < \sigma < \infty)$, представимая в окрестности начала $z = 0$ рядом Тейлора вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+\rho^{-1}n)} z^n; \tag{1}$$

тогда легко видеть, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sigma^{1/\rho}$. Отсюда следует, что функция

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \tag{2}$$

голоморфна в области $|z| > \sigma^{1/\rho}$. Заметим, что при $\rho = 1$ $g(z)$ есть функция, ассоциированная с целой функцией $f(z)$ по Борелю.

Если L — произвольный замкнутый спрямляемый контур, охватывающий все особенности функции $g(z)$, то из (1) и (2) следует, что имеет место представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L E_\rho(z\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta \quad (|z| < \infty), \tag{3}$$

где $E_\rho(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+n\rho^{-1})}$ — целая функция Миттаг-Леффлера порядка ρ и типа 1 [1]. Заметим, что при $\rho > 1/2$ функция $E_\rho(z)$ обладает следующим замечательным свойством: при $|z| \to \infty$

$$\left|E_\rho(z) - \rho e^{z^\rho}\right| < \frac{M}{|z|}, \quad |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}; \tag{4}$$

$$\left|E_\rho(z) + \frac{1}{\Gamma(-\rho^{-1})\, z}\right| < \frac{M_1}{|z|^2}, \quad |\arg z| \geqslant \frac{\pi}{2\rho} + \delta \quad (\delta > 0), \tag{5}$$

где M и M_1 — постоянные.

Из (4), в частности, следует, что $E_\rho(z)$ ограничена на лучах $\arg z = \pm\pi/2\rho$.

Для любого ϑ $(0 \leqslant \vartheta < 2\pi)$ область $\Delta(\vartheta, \sigma, \rho)$ определим как множество точек z, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\,(ze^{-i\vartheta})^\rho > \sigma$. Очевидно, что луч $z = re^{i\vartheta}$ $(\sigma^{1/\rho} < r < \infty)$ принадлежит области $\Delta(\vartheta, \sigma, \rho)$ и что область $\Delta(\vartheta, 0, \rho)$ совпадает с углом $|\arg z - \vartheta| < \pi/2\rho$.

Устанавливается, что при $z \in \Delta(\vartheta, \sigma, \rho)$ имеет место следующее интегральное представление функции $g(z)$:

$$g(z) = \rho z^{\rho-1} e^{-i\vartheta\rho} \int_0^\infty f(te^{-i\vartheta}) e^{-t^\rho (ze^{-i\vartheta})^\rho} t^{\rho-1} dt. \tag{6}$$

2°. Рассматривая целые функции, интегрируемые по лучам, исходящим из $z=0$, представляется возможным при помощи формул (3) и (6), являющихся в известном смысле обращением одна другой, установить предложения, приводимые ниже.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \geqslant {}^1/_2$ и типа σ $(0 < \sigma < \infty)$. Если существует интеграл*

$$\int_0^\infty |f(te^{-i\vartheta})|^2 t^{\rho-1} dt, \tag{7}$$

то при любом $\delta > 0$ имеет место следующее интегральное представление функции $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|z| = \sigma^{1/\rho}+\delta \\ |\arg\zeta - \vartheta| \geqslant \frac{\pi}{2\rho}}} E_\rho(z\zeta) g(\zeta) d\zeta + \int_0^{\sigma^{1/\rho}+\delta} E_\rho\{ze^{i(\vartheta+\pi/2\rho)} v\} v^{\rho-1} \psi_1(v) dv +$$

$$+ \int_0^{\sigma^{1/\rho}+\delta} E_\rho\{ze^{i(\vartheta-\pi/2\rho)} v\} v^{\rho-1} \psi_2(v) dv \quad (|z| < \infty), \tag{8}$$

где функции $\psi_k(v)$ $(k=1, 2)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^{\sigma^{1/\rho}+\delta} |\psi_k(v)|^2 v^{\rho-1} dv < +\infty \quad (k=1, 2). \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ $({}^1/_2 \leqslant \rho < 1)$ и типа σ, удовлетворяющая условиям*

$$\int_0^\infty |f(te^{\pm\pi(1-1/2\rho)i})|^2 t^{\rho-1} dt; \tag{10}$$

тогда имеет место представление

$$f(z) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(-zv) \psi(v) v^{\rho-1} dv \quad (|z| < \infty), \tag{11}$$

где $\psi(v)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\sigma^{1/\rho}} |\psi(v)|^2 v^{\rho-1} dv < +\infty. \tag{12}$$

Заметим, что при $\rho = {}^1/_2$ справедливо и обратное утверждение, а именно: при $\rho = {}^1/_2$ (тогда $E_{1/2}(z) = \operatorname{ch}\sqrt{z}$) всякая функция вида (11) будет целой функцией порядка ${}^1/_2$, типа σ, удовлетворяющей условию $\int_0^\infty |f(t)|^2 t^{-1/2} dt < +\infty$. В случае же, когда ${}^1/_2 < \rho < 1$, из (4) следует только, что функция (11), будучи целой, порядка ρ и типа σ, ограничена на лучах $\arg z = \pm\left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)\pi$.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ $(1 \leqslant \rho < 2)$ и типа σ. Если существуют интегралы*

$$\int_0^\infty \left| f\left(te^{\pm\frac{\pi}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\rho}\right)i}\right)\right|^2 t^{\rho-1}\,dt, \tag{13}$$

то имеет место представление вида

$$f(z) = \int_{-\sigma^{1/\rho}}^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho\{ivz\}\,\psi(v)\,v^{\rho-1}\,dv, \tag{14}$$

где $\int_{-\sigma^{1/\rho}}^{\sigma^{1/\rho}} |\psi(v)|^2\,|v|^{\rho-1}\,dv < +\infty$.

Замечание. При $\rho = 1$ справедливо и обратное утверждение, а именно: всякая функция вида (14) при $\rho = 1$ (тогда $E_1(z) = e^z$) будет целой функцией порядка 1 и типа σ, удовлетворяющей условию $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt < +\infty$.

Таким образом, при $\rho = 1$ теорема 3 содержит, как частный случай, результат, принадлежащий Палей и Винеру [2,3]. В случае же, когда $1 < \rho < 2$, из (4) следует лишь, что функция (14) ограничена на лучах $\arg z = \pm\frac{\pi}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\rho}\right)$.

Из-за недостатка места мы здесь не приводим формулировку общего результата для целых функций произвольного порядка, а ограничимся лишь случаем целых функций целого порядка.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — целая функция целого порядка $p \geqslant 1$ и типа σ. Если*

$$\int_0^\infty \left| f\left(te^{-i\pi\left(\frac{1}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{p}\right)}\right)\right|^2 t^{p-1}\,dt < +\infty \quad (k = 0, 1, \ldots, 2p-1), \tag{15}$$

то имеет место интегральное представление вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{-\sigma^{1/p}}^{\sigma^{1/p}} E_p\left\{zve^{i\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{p}\right)}v\right\}\psi_k(v)\,v^{p-1}\,dv, \tag{16}$$

где $\int_{-\sigma^{1/p}}^{\sigma^{1/p}} |\psi_k(v)|^2\,v^{p-1}\,dv < +\infty$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$.

В случае $p = 1$ получаем теорему Палей и Винера, а при $p \geqslant 2$ можем лишь утверждать, что функция (16) целая, порядка p, типа σ, ограниченная на лучах $\arg z = -\pi\left(\frac{1}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{p}\right)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2p-1)$.

3°. Приводим теперь некоторые теоремы единственности, вытекающие из предыдущих формул для представления целых функций.

Теорема 5. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ $({}^1/{}_2 \leqslant \rho < 1)$ нормального типа, такая, что:* 1) $f(re^{i\vartheta_1})$ *и* $f(re^{i\vartheta_2})$ *остаются ограниченными при $r \to \infty$, где $\vartheta_1 < \vartheta_2$ и $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \pi/\rho$;* 2) $f^{(\lambda_n)}(0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Для того чтобы из этих условий следовало, что* $f(z) \equiv \mathrm{const}$, *необходима и достаточна расходимость ряда* $\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^{-1}$.

Теорема 6. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ $(\rho > 1/2)$ нормального типа и такая, что:* 1) $\int\limits_0^\infty |f(te^{\pm\pi/2\alpha})|^2 t^{\rho-1}\,dt < +\infty$, $\alpha > \max\left\{\rho, \frac{\rho}{2\rho-1}\right\}$; 2) $f^{(\lambda_n)}(0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$; 3) *число* $n(t)$ *чисел* $\lambda_n < t$ *удовлетворяет условию* $n(t) \geqslant \left(1 - \frac{\alpha+\rho}{2\alpha\rho}\right)t + t\delta(t)$, *где* $\delta(t) > 0$ *не убывает и* $\int\limits^\infty t^{-1}\delta(t)\,dt = +\infty$. *Тогда* $f(z) \equiv 0$.

Заметим, что условие 3) теоремы выполняется, если, в частности, $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} > 1 - \frac{\alpha+\rho}{2\alpha\rho}$.

Следствие 1. Теорема 6 справедлива и в предельном случае $\alpha = +\infty$, т. е. когда $f(z)$ вместо условия 1) удовлетворяет условию $\int\limits_0^\infty |f(t)|^2 t^{\rho-1}\,dt < +\infty$.

Следствие 2. При $\rho < 2$, если в теореме 6 условие 1) заменить условием: 1') $f\left(re^{\pm\frac{\pi}{2\alpha}i}\right)$ остается ограниченным при $r\to\infty$, то будем иметь $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

В случае, когда $\alpha = \infty$, т. е. $f(t)$ ограничена при $t \geqslant 0$, и $\liminf \frac{n}{\lambda_n} > 1 - \frac{1}{2\rho}$, результат следствия 2 был ранее получен А. О. Гельфондом [4], но при дополнительном предположении о периодичности (ft) при $-\infty < t < \infty$.

Теорема 7. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ $(1 \leqslant \rho < 2)$ нормального типа, для которой:* 1) $f\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1\pm\frac{1}{\rho}\right)}\right)$ *остается ограниченным при* $r\to\infty$; 2) $f^{(\lambda_n)}(0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$; 3) *последовательность* $\{\lambda_n\}$ *разбита на два класса* $\{2p_n\}$ *и* $\{2q_n+1\}$ — *четных и нечетных чисел. Для того чтобы при этих условиях имели* $f(z) \equiv \mathrm{const}$, *необходима и достаточна расходимость обоих рядов* $\sum\limits_{n=2}^\infty p_n^{-1}$, $\sum\limits_{n=2}^\infty q_n^{-1}$.

Не останавливаясь на других возможных случаях, приводим лишь общий результат для целых функций целого порядка, что вытекает из теоремы 4.

Теорема 8. *Пусть $f(z)$ — целая функция целого порядка $p \geqslant 1$ нормального типа, удовлетворяющая условиям (15). Пусть последовательность натуральных чисел $\{\lambda_n\}$ разбита на $2p$ классов* $\{2p\lambda_n^{(k)} + k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2p-1)$.

Если $f^{(\lambda_n)}(0) = 0$, *то для тождества* $f(z) \equiv 0$ *достаточно, чтобы расходились все ряды* $\sum\limits_{n=2}^\infty [\lambda_n^{(k)}]^{-1}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2p-1)$.

В случае, когда хоть один из этих рядов сходится, существует целая функция порядка p, типа σ, отличная от тождественного нуля и представимая в виде (16).

Сектор математики
Академии наук Арм.ССР

Поступило
22 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktiontheorie, 2, гл. V, 1927. [2] R. Paley and N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, 1934. [3] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, 1947, гл. IV. [4] А. О. Гельфонд, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, № 2, 99 (1941).